

Czesław GRABARCZYK

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
Wydział Inżynierii i Kształtowania Środowiska

METODY OBLICZANIA WSPÓŁDZIAŁANIA RZĘDU STUDNI ZE ZŁOŻONYM LEWAREM

CALCULATION METHODS OF COOPERATION BETWEEN A ROW OF WELLS AND A COMPOUND SIPHON

The subject of the consideration to follow is the compound systems of classic siphons for shallow underground infiltration water intakes in river valleys – from a significant number of wells. The presentation includes:

- *a general hydraulic analysis of cooperation between aquiferous layer's bed, a well, a siphon system and cumulative well; with the consideration of the mutual interference of wells – with the application of Forchheimer theory;*
- *a general mathematical description of the of the correlation of the above introduced hydraulic system, brought to a non-linear algebraic equation; and*
- *an introduction of the generalized method of calculating hydraulic system, with the application of Newton-Raphson method of solving a non-linear equations set, enabling numerical simulation in various exploitation conditions and the examination of hydraulic properties of the discussed system.*

1. Wprowadzenie

Pod pojęciem *lewar* rozumie się układ złożony z przewodu rurowego i dwóch zbiorników, górnego i dolnego, połączonych w ten sposób, że wierzchołek przewodu usytuowany jest powyżej zwierciadła wody w zbiorniku górnym. Kiedy lewar zostanie całkowicie wypełniony wodą, rozpoczyna się przepływ wody ze zbiornika górnego do dolnego, przy czym wymagane jest aby wydzielające się powietrze, pod wpływem panującego podciśnienia, nie zalegało w lewarze [2,9,17,23]. W szczególnym przypadku, lewar może działać bez zbiornika dolnego, ze swobodnym wypływem z rury usytuowanym *poniżej zwierciadła w zbiorniku górnym*. W technice wyróżnia się *lewary proste*, składające się z jednego przewodu lewarowego, które pobierają wodę z jednego zbiornika górnego, oraz *złożone układy lewarowe*, pobierające wodę z dowolnej ilości zbiorników górnych i doprowadzające wodę do jednego lub kilku zbiorników dolnych.

Praktyczne zastosowania lewarów zostały opisane już przez *Herona z Aleksandrii* w dziele pt. *Pneumatyka*, gdzie przedstawiono 20 metod zastosowań lewarów, m.in. do osuszania i nawadniania gruntów graniczących z pustynią oraz przedstawiono projekty

wykorzystania lewarów do transportowania wody przez wzgórza i doliny [4]. W związku z tym, niekiedy klasyczne lewary nazywane są *lewarami Herona**.

* **Heron z Aleksandrii**, II w. p.n.e., grecki matematyk, mechanik i wynalazca. W dziele *Mechanika* opisał 5 maszyn prostych: dźwignię, klin, krążki, kołowrót i gwint oraz zastosowania przekładni zębatych do wynalezionych urządzeń. Wykorzystywał własności równoległoboku sił. W *Pneumatyce* opisał m.in. szereg mechanizmów napędzanym sprężonym lub nagrzanym powietrzem i parą wodną, pompę pożarniczą. Ponieważ szczególnie interesowały go praktyczne zastosowania wiedzy, bywa nazywany pierwszym inżynierem.

W praktyce domowej elastyczne rurki lewarowe od dawna powszechnie są stosowane do ściągania wina z butli, bez konieczności jej przechylenia. W technice wodociągowej współcześnie złożone układy lewarowe znajdują zastosowanie m.in. do hydraulicznego sterowania bezzaworowymi filtrami do uzdatniania wody [12] oraz do ujmowania w dolinach rzek infiltracyjnych wód powierzchniowych z licznych studni wierconych [1,5,9]. *Infiltracja* do płytko zalegającego złoża wodonośnego następuje tylko z koryta rzeki lub dodatkowo ze sztucznych stawów infiltracyjnych, wykonywanych wzdłuż rzeki w jednym lub większej ilości rzędów. Stawy infiltracyjne zalewane są wodą powierzchniową przepompowywaną z rzeki.

Do ujmowania wody ze złoża wodonośnego wzbogacanego infiltracją służą studnie wiercone, z reguły zupełne i ze swobodnym zwierciadłem wody w złożu. Pobór wody ze studni odbywa się podciśnieniowymi przewodami, podłączonymi do zbiorczego przewodu lewarowego. Ilość studni podłączonych do lewara zbiorczego zależy od całkowitego zapotrzebowania wody Q_c . Lewar do-prowadza wodę do tzw. studni zbiorczej, w której zwierciadło wody musi być utrzymywane na odpowiednio obniżonej wysokości względem zwierciadeł wody w studniach. W przypadku małych ujęć wody ilość studni może wynosić kilkanaście, natomiast w przypadku ujęć wody dla dużych miast ilość podłączonych studni może być znaczna (kilkadziesiąt, a nawet powyżej stu).

Cechami tak określonego ujęcia wody jest to, że

1. procesowi infiltracji wód powierzchniowych do złoża wodonośnego towarzyszy wstępny etap filtracyjnego uzdatniania wody; w związku z tym konieczne jest stosowanie odpowiednich technologicznych zabiegów regeneracyjnych podłoża stawów infiltracyjnych;
2. pompy pobierające wodę zainstalowane są tylko w studni zbiorczej, a tym samym tylko do tego miejsca musi być doprowadzona energia elektryczna; gdyby zamiast lewara woda miała być pobierana z każdej studni pompami głębinowymi, wtedy energia elektryczna musiałaby być doprowadzona do wszystkich studni;
3. taki złożony układ wraz ze studniami ujęcia i studnią zbiorczą tworzy zamknięty system *urządzeń wzajemnie uwarunkowanych fizycznie*, wymagających stosowania metod obliczeniowych *integrujących cały rozważany system hydrauliczno-techniczny*.

Liczne złożone układy lewarów do ujmowania wód podziemnych – ze złożeń wodonośnych w dolinach rzek, wzbogacanych sztuczną infiltracją – z dużą liczbą studni, **stosowane są** zagranicą [1] – m.in. w Niemczech, Anglii, Francji i państwach b. Związku Radzieckiego, oraz w Polsce [5] – m.in. w Poznaniu z Warty, Wrocławiu z Oławy, Krakowie z Wisły i Sanu, Białymstoku z Supraśli, Legnicy z Kaczawy i Kobiernicach k. Bielska Białej ze zbiornika retencyjnego Czaniec na Sole. Wielkość tych ujęć charakteryzowana jest parametrami [5] zestawionymi w tablicy.

Najdokładniej udokumentowane jest ujęcie wody w Poznaniu [14,18,19], gdzie istnieją trzy rzędy stawów oraz trzy **lewary o długościach 3,85, 3,40 i 3,56 km**, podłączone odpowiednio do **143, 113 i 122 studni** o średnicy 400 mm. Średnice lewarów wra-stają od 400 do 1200 mm.

Ujęcie wody	Powierzchnia stawów infiltracyjnych	Wydajność ujęcia	Liczba studni	średnia wydajność 1 studni	głębokość zwierciadła wody	miąższość warstwy wodonosnej	współczynnik filtracji średni
	ha	m ³ /d		m ³ /d	m ppt	m	m/s
Poznań	26,0	117 000	360	310	3 ÷ 4	10 ÷ 15	7,8 · 10 ⁻⁴
Wrocław	35,7	115 000	480	240	2 ÷ 5	7 ÷ 9	4 · 10 ⁻⁴
Kraków	7,0	65 000	97	670	1 ÷ 2	7	4 · 10 ⁻⁴
Kobiernice	8,2	70 000	37	1 892	2,5 ÷ 3,5	5,0 ÷ 7,5	3 · 10 ⁻⁴
Legnica	8,7	36 000	64	562			
Białystok	2,1	10 000	17	588	2	14 ÷ 17	4 · 10 ⁻⁴

Tak wielkie układy, w których występuje współdziałanie złoża wodonosnego, licznych studni oddziałujących na siebie oraz złożonych lewarów, wymagają wnikliwych obliczeń. Tymczasem, w polskiej literaturze rozpowszechnione są *graficzne metody* [9, 11, 15, 22] obliczania, charakteryzujące się znacznymi założeniami upraszczającymi fizyczne warunki działania takich układów oraz ograniczonym zakresem inżynierskich zastosowań – do małej ilości studni. Jako bardziej ogólne i dokładniejsze należy uznać *metody rachunkowe* [16]. W przeciwieństwie do metod graficznych, zaletą metod rachunkowych jest to, że ich algorytmy i komputerowe programy obliczeniowe mogą być wykorzystywane do różnych analiz symulacyjnych, ważnych dla zastosowań inżynierskich.

Przedmiotem i celem opracowania jest *ogólny zintegrowany opis matematyczny hydraulicznych warunków działania rozważanego dużego złożonego układu lewarowego*, z uwzględnieniem interferencji złoża wodonosnego, studni o zróżnicowanych wydajnościach, układu lewarowego oraz studni zbiorczej. Zostanie przedstawiona uogólniona rachunkowa metoda rozwiązywania jednego wybranego zagadnienia, przystosowanego do komputerowej realizacji obliczeń. Pewną inspiracją do przedstawionego opracowania była publikacja [16]. Rozważania zostaną zawężone do *lewarów klasycznych*, z wyłączeniem samoodpowietrzających lewarów *Steinwendera*.

2. Obliczenia położenia zwierciadła wody w studniach

Dla potrzeb obliczania lewara konieczna jest znajomość wysokości zwierciadła w studniach, w *warunkach wzajemne oddziaływania*, gdyż odległość pomiędzy studniami z reguły wynosi tylko kilkadziesiąt metrów. Z metod obliczania oddziaływania w warunkach *ustalonych* [8, 9] i *nieustalonych* [6, 7], do dalszych rozważań zostaje przyjęta **metoda Forhcheimera dla warunków ustalonych**.

Do ustalania zależności funkcyjnej między rzędną z zwierciadła wody w studni a jej wydajnością Q , zakładamy, że słuszne jest liniowe prawo filtracji *Darcy* oraz założenie *Dupuit*, że linie prądu radialnego dopływu do studni w przybliżeniu są prostoliniowe i poziome oraz że prędkości są wprost proporcjonalne do spadku zwierciadła, niezależnie od głębokości położenia rozpatrywanej strugi wody. W związku z tym, dla pojedynczej studni zupełnej (rys. 1), gdy dolny koniec filtru usytuowany jest na spągu złoża wodonosnego, *nie będącej pod wpływem sąsiednich studni*, poszukiwana zależność funkcyjna przyjmuje postać wzoru *Dupuit-Thiem'a* [3, 9]

$$H^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi k} (\ln R - \ln r) \quad (1)$$

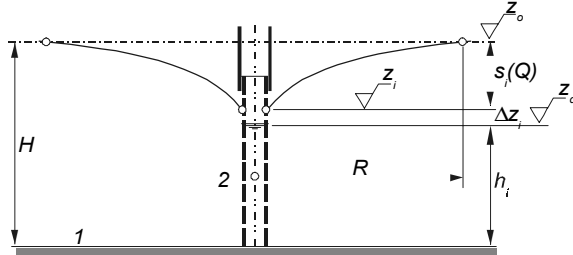
gdzie

H – miąższość hydrostatycznej warstwy wody w złożu względem spągu;

h – wysokość najniższego punktu leja depresyjnego (na zewnętrznej powierzchni studni) względem spągu;

k – współczynnik filtracji.

Przy założeniu *Dupuit*, radialny dopływ wody do studni jest przepływem potencjalnym, przy czym wzór (1) jest szczególnym rozwiązaniem równania różniczkowego *Forchheimera* [3,8].



Rys. 1. Oznaczenia leja depresji studni

- 1 - spąg złoża wodonośnego lub granica strefy przepływu wody
- 2 - filtr studzienny

Fig. 1. Notations of the well depression funnel

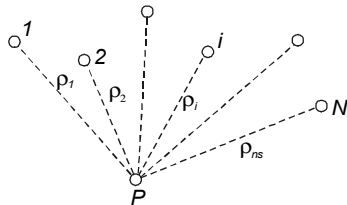
W rozważanym przypadku rzędu licznych studni, kiedy *sąsiednie studnie oddziałują na siebie*, potrzebne jest ustalenie odpowiedniej zależności funkcyjnej dla większej ilości studni o różnej wydajności i różnych położeniach zwierciadła wody w studniach. W tym celu rozpatrzmy grupę dowolnie rozmieszczonych N_s studni, jak na rys. 2. Dla punktu P, który leży w strefie oddziaływania studni na złożę wodonośne, w odległości ρ_j od j-tej studni, należy *określić obniżoną wysokość strumienia wody (leja depresyjnego, powstałego w wyniku jednoczesnego działania wszystkich studni)*.

Wysokość strumienia, która ustali się na skutek eksploatacji tylko j-tej studni, oznaczmy literą h_j . W związku z tym, wykorzystując wzór (1) możemy napisać

$$H^2 - h_j^2 = \frac{Q_j}{\pi k} (\ln R_j - \ln \rho_j) \tag{2}$$

gdzie

- ρ_j – odległość punktu P od j-tej studni, gdy $\rho_j < R_j$;
- h_j – wysokość obniżonego zwierciadła w punkcie P na skutek eksploatacji j-tej studni;
- Q_j – natężenie poboru wody z j-tej studni, dla $j = 1, 2, 3, \dots, N_s$.



Rys. 2. Grupa studni oddziałujących na siebie

Fig. 2. Interferring wells group

Można wykazać [3,8], że (2) jest szczególnym rozwiązaniem równania różniczkowego *Forchheimera* [3] dla płaskiego *przepływu potencjalnego* w złożu wodonośnym, wywołanym poborem wody tylko z jednej j-tej studni, przy czym h_j^2 jest *potencjałem* φ

prędkości przepływu. Równanie to jest słuszne dla każdej studni (rys. 1). Zapiszmy równanie (1) w postaci korzystniejszej dla dalszych rozważań, gdzie wielkość H^2 została oznaczona jako stała całkowania C

$$h_j^2 = -\frac{1}{\pi k} (Q_j \ln R_j - Q_j \ln \rho_j) + C_j \tag{3}$$

Każde z tych równań jest opisem skutków poboru wody z pojedynczej studni. Gdy wystąpi jednoczesny pobór wody z wszystkich studni, to ze względu na potencjalnych charakter przepływu opis matematyczny wypadkowego pola przepływu może być wyznaczony przez zastosowanie zasady superpozycji [3,8] jednostkowych strumieni potencjalnych poszczególnych studni. Zasada ta sprowadza się do tego, że dzięki liniowości równania Forchheimera względem potencjału $\varphi = h_j^2$ prędkości przepływu, dowolna kombinacja liniowa rozwiązań jednostkowych również będzie jego rozwiązaniem. W szczególnym przypadku, także suma algebraiczna potencjałów prędkości dowolnej ilości jednostkowych przepływów będzie rozwiązaniem równania Forchheimera, tzn.

$$h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + \dots + h_{N_s}^2$$

gdzie h^2 – potencjał wypadkowy. Wobec tego, sumując (3) dla wszystkich studni, otrzymujemy

$$h^2 = -\frac{1}{\pi k} \left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln R_j - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_j \right) + C \tag{4}$$

gdzie $C = \sum C_j$.

h – wysokości strumienia względem spągu, przy jednoczesnym poborze wody z wszystkich studni.

Można przyjąć założenie upraszczające, że zasięgi lejów depresyjnych poszczególnych studni spełniają warunek: $R_1 = R_2 = R_3 = \dots = R$. Uzasadnieniem dopuszczalności przyjęcia takie założenia jest mały wpływ odchylenia R_j na dokładność wyniku, ze względu na to, że R występuje pod znakiem logarytmu. Nawet znaczne odchylenia jego wartości nie wywołują istotnego wpływu na dokładność obliczeń. Np. zmiana wartości R z 2000 m do 4000 m, czyli o 100 % wywołuje zmianę wartości logarytmu tylko o 9,1 %. Wobec tego równanie (4) przyjmuje postać

$$h^2 = -\frac{1}{\pi k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \right) \ln R - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_j \right] + C \tag{4'}$$

W celu wyznaczenia stałej całkowania C zakładamy, że największa odległość pomiędzy studniami jest mała w porównaniu z R . Wobec tego, przyjmując punkt P^* poza linią graniczną wypadkowego leja depresyjnego, gdzie nie występuje obniżenie zwierciadła, tzn. $h = H$, można przyjąć, że $\rho_j \approx R$. Podstawiając przyjęte warunki graniczne do równania (4'), otrzymujemy, że stała całkowania przyjmuje wartość $C = H^2$. W związku z tym, równanie (4') przyjmuje postać

$$H^2 - h^2 = \frac{1}{\pi k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \right) \ln R - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_j \right] \tag{5}$$

Wzór (5) określa wysokość leja depresji – w dowolnie usytuowanym punkcie P leja depresji – wywołwanego jednoczesnym oddziaływaniem wszystkich j-tych studni.

Wzór (5) umożliwia określenie depresji w dowolnie wybranej i-tej studni. W tym celu, punkt P należy usytuować na zewnętrznej powierzchni wybranej i-tej studni (rys. 3) o wydajności Q_i . W warunkach wzajemnego oddziaływania studni, wysokość strumienia w punkcie P

wynosi h_i , natomiast $\rho_i = r$, zgodnie z definicją wielkości ρ . Wobec tego, wzór (5) przyjmie rozszerzoną postać

$$H^2 - h_i^2 = \frac{1}{\pi k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \right) \ln R - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_j - Q_i \ln r \right] \quad (6')$$

gdzie ρ_j – odległość j -tej studni od i -tej studni.

Można wprowadzić uogólniony zapis powyższego wzoru

$$H^2 - h_i^2 = \frac{1}{\pi k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \right) \ln R - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_{ji} \right] \quad (6)$$

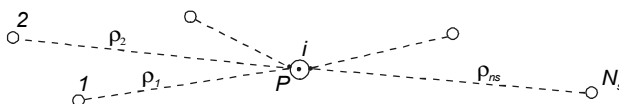
gdzie

ρ_{ji} – odległość j -tej studni od i -tej studni; w szczególnym przypadku, dla i -tej studni $\rho_{ii} = r$ – promień studni;

Q_j – wydajność wszystkich studni; w szczególnym przypadku, dla i -tej studni, gdy $Q_i = Q$, wtedy $\rho_{ii} = r$;

.... – pozostałe oznaczenia – jak wyżej.

Należy zauważyć, że w szczególnym przypadku, gdy $Q_j = 0$ dla wszystkich $j \neq i$, gdy $Q_i \neq 0$ oraz $\rho_{ii} = r$, wtedy wzór (6) przyjmuje postać wzoru Dupuit-Thiem'a (1) dla pojedynczej i -tej studni; co wykazuje poprawność wzoru (6), a tym samym rozszerzonego wzoru (6').



Rys. 3. Ustalanie depresji w i -tej studni w warunkach wzajemnego oddziaływania

Fig. 3. Depression assessment in i -th interfering well

Rozwiązując równanie (6) względem h_i , otrzymujemy

$$h_i = \sqrt{H^2 - \frac{1}{\pi k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \right) \ln R - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_{ji} \right]} \quad (7)$$

Wzór (6), zastosowany dla każdej i -tej studni, w warunkach wzajemnego oddziaływania na siebie, tworzy układ N_s liniowych równań względem Q_j , z których można wyznaczyć Q_i dla pomierzonych wartości h_i zwierciadeł wody w studniach, przyjmując założenie upraszczające, że $h_i \approx h_{di}$.

W wymienionych równaniach występują trzy wielkości stałe ρ_{ji} , k i R . Odległości ρ_{ji} wynikają z przestrzennego usytuowania względem siebie studni tworzących rozważaną grupę. Wartość współczynnika filtracji k ustalana jest w eksperymencie podczas wiercenia studni. Promień zasięgu lejki depresyjnego R może być ustalany orientacyjnie, wykorzystując odpowiednie wzory empiryczne.

Uwagi uzupełniające, dotyczące wysokości zwierciadła wody w studniach oraz orientacji rzędu studni względem kierunku przepływu wód gruntowych:

1. Wielkości h_i dotyczą najniższego punktu lejki depresyjnego na zewnątrz studni, na powierzchni zewnętrznej piaskowej obsypki; tzw. *dynamiczne zwierciadło* wody w studni (rys. 1) znajduje się na niższej wysokości h_{di} , przy czym obniżenie $h_i - h_{di} = \Delta h_i$ równe jest wysokości strat hydraulicznych wywołanych oporem przepływu przez zewnętrzną obsypkę oraz przez filtr studzienny i jest zależnością funkcyjną $h_i - h_{di} = S_{fi} Q_i^2$, gdzie S_{fi} –

oporność filtru i -tej studni, ustalana empirycznie; podstawiając wzór (6) do powyższej zależności, uwzględniając oznaczenie $H = z_0$, otrzymujemy

$$h_{di} = h_i - \Delta h_i = \sqrt{H^2 - \frac{1}{\pi k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \right) \ln R - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_{ji} \right]} - S_{fi} Q_i^2 \quad (8)$$

Także zależność funkcyjna $\Delta h_i = f(Q_i)$ – tzw. *charakterystyka studni* – jest ustalana empirycznie w procesie *próbnych pompowań studni*. Należy podkreślić, że *wielkość z_{di} warunkuje działanie lewara i musi być przyjmowana do jego obliczeń hydraulicznych*. W przybliżonych obliczeniach wstępnych może być przyjmowane założenie upraszczające, że $h_i - h_{di} \approx 0$ (rys. 3), jako wielkość pomijalnie mała. Aby nie komplikować zapisu w dalszych rozważaniach wielkość ta zostanie pominięta.

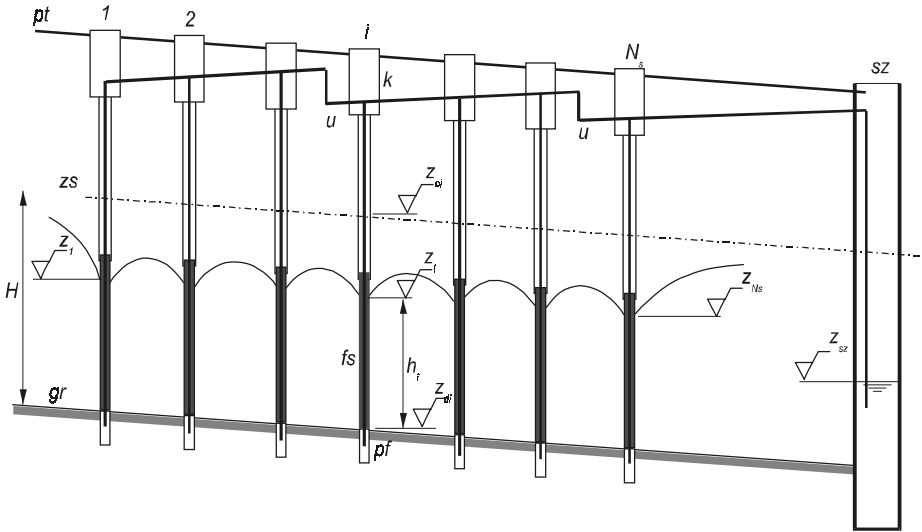
2. Równania (6) dla obniżenia zwierciadła h_i , w warunkach wzajemnego oddziaływania studni, zostały wyprowadzone w wyniku zastosowania zasady superpozycji *rozwiązań dla indywidualnych dopływów do poszczególnych studni w warunkach płaskich przepływów potencjalnych o małym nachyleniu zwierciadła*. Z wyprowadzenia dla grupy studzien (rys. 3 i 4) dowolnie usytuowanych względem siebie, wynika, że nie było konieczne przyjmowanie żadnych warunków dotyczących kierunku przepływu wód gruntowych. Wobec tego można stwierdzić, że *rząd studni może być dowolnie zorientowany względem kierunku strumienia wód gruntowych*: prostopadle, ukośnie lub równolegle. Wykorzystując to stwierdzenie, za podstawę do dalszych rozważań przyjmujemy ogólny przypadek *orientacji rzędu studni w strumieniu wód gruntowych*.

3. Budowa układu lewarowego ujęcia wody z rzędu studni

Ze względu na założenia przyjętej *metody Forchheimera* obliczania wzajemnego oddziaływania studni, do dalszych rozważań zostaje przyjęta odpowiednia *idealizacja hydrogeologicznych warunków* złoża wodonośnego (rys. 4):

- Złoże wodonośne znajduje się w dolinie rzeki, którego spąg jest dowolnie ukształtowany i znajduje się na znacznej głębokości pod powierzchnią terenu.
- Ze względu na naturalny spływ wód gruntowych do rzeki *pierwotne zwierciadło wody*, przy braku poboru wody ze studni, *jest płaskie z małym nachyleniem w kierunku spływu*.
- Głębokości studni są jednakowe względem zwierciadła hydrostatycznego wody.
- Powierzchnia utworzona przez dna studni wyodrębnia ze złoża wodonośnego *strefę aktywnego oddziaływania studni*, tzn. przyjmuje się założenie upraszczające, że studnie spełniają warunki studni zupełnych. Konsekwencją takiego założenia jest przyjęty wzór (1).
- Złoże wodonośne w strefie oddziaływania studni jest piaszczyste i jednorodne, tzn. spełnia warunek $k = \text{idem}$.

Studnie wykonane są w jednakowych odstępach w prostoliniowym rzędzie wzdłuż brzegu rzeki. Obok rzędu studni, w niewielkiej odległości (1 ÷ 2 m) ułożony jest rurociąg lewara zbiorczego, do którego podłączone są rury ssawne z poszczególnych studni. Rurociąg zbiorczy wznosi się w kierunku przepływu, z nachyleniem i , umożliwiającym przemieszczanie się pęcherzyków gazów. Ponieważ rurociąg musi być ułożony poniżej strefy zamarzania gruntu, w przypadku dużych długości lewara, często występuje konieczność wykonywania pionowych uskoków. W celu sprowadzenia powietrza z wierzchołka uskoku w dół, konieczne jest zastosowanie specjalnych konstrukcji uskoku [17], np. *Lindleya* lub z wykorzystaniem zwężki *Venturiego*.



Rys. 4. Schemat lewarowego ujęcia wód gruntowych

- 1, 2, ..., i, ..., N - numery studni,
 pt - powierzchnia terenu,
 zs - zwierciadło statyczne,
 gr - granica obszaru przepływu wody,
 fs - filtr studni,
 pf - rura podfiltrowa,
 u - pionowy uskoki lewara zbiorczego,
 k - komora węzła połączenia przewodu ssawnego z lewarem.

Fig. 4. Siphon ground water intakes diagram

4. Obliczanie wysokości strat hydraulicznych

Przepływ wody w poszczególnych odcinkach rozważanego układu lewarowego wywołuje liniowe i lokalne straty hydrauliczne, obliczane wg wzoru

$$\Delta H = \left(\sum \zeta + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4} \quad (9)$$

gdzie ζ - współczynnik lokalnych oporów hydraulicznych;
 λ - współczynnik liniowych oporów hydraulicznych, obliczany wg wzoru Phama

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\varepsilon}{3,7} - \frac{4,52}{\text{Re}} \lg \left(\frac{7}{\text{Re}} + \frac{\varepsilon}{7} \right) \right] \quad (10)$$

aproxymującego [10] normowy [24] wzór Colebrooka-White'a

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71} \right)$$

Re - liczba Reynoldsa, obliczana wg wzoru

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu}$$

ν - kinematyczna współczynnik lepkości wody;
 ε - względna chropowatość wewnętrznych ścian rury $\varepsilon = k/d$;

k – bezwzględna chropowatość rury;
 w – średnia prędkość przepływu.

W przypadku obliczania zagadnień przy zadanych średnicach przewodów, opory lokalne można zastąpić odpowiednim odcinkiem rury, wywołującym porównywalne straty hydrauliczne, wg wzoru

$$l_z = \frac{\sum \xi}{\lambda} d \quad (11)$$

Wobec twego wzór (9) przyjmuje postać

$$\Delta H = \lambda \frac{L}{d} \frac{8Q^2}{\pi^2 g d^4} = SQ^2 \quad (12)$$

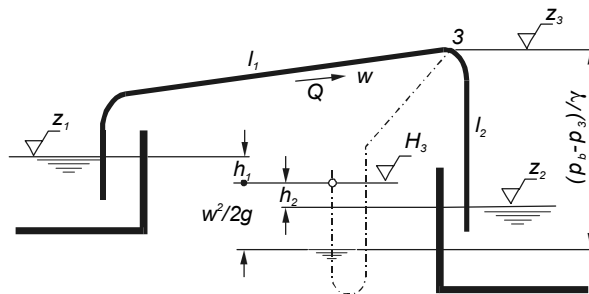
gdzie S – oporność przewodu o długości L, wyznaczana wg wzoru

$$S = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} L \quad (13)$$

W związku z tym, w obliczeniach należy pamiętać, że oporność przewodu S zależy od Q, gdyż we wzorze (13) występuje współczynnik λ .

5. Hydrauliczne warunki działania prostego lewara

Podstawą do matematycznego opisu działania układu *złożonego lewara* będą odpowiednie zależności funkcyjne dotyczące działania *prostego lewara*, przedstawionego na rys. 5. Liczbami 1 i 2 oznaczono odpowiednio zwierciadło górne i dolne, których rzędne wynoszą z_1 i z_2 . W stanie początkowym rura lewarowa jest wypełniona powietrzem o ciśnieniu barometrycznym. Przekrój poprzeczny najwyżej i najdalej położony względem wlotu – oznaczony liczbą 3 - nazywany jest *przekrojem wierzchołkowym* lewara.



Rys.5. Geometryczna interpretacja hydraulicznych warunków działania lewara prostego

Fig. 5. Geometric interpretation of hydraulic conditions in a simple siphon activity

Warunkiem koniecznym uruchomienia przepływu cieczy ze zbiornika górnego do dolnego jest *zalanie lewara cieczą*. Zalewanie przewodu lewarowego i uruchamianie strumienia w warunkach technicznych, tzn. przy dużych średnicach, wykonywane jest przez wypompowanie powietrza, z zastosowaniem *pompy próżniowej*, podłączonej do przekroju

wierzchołkowego 3 lewara, w który należy wmontować króciec z zaworkiem. W przewod ssawny pompy próżniowej wmontowany jest niewielki zbiornik, który służy do ochrony pompy przed zalaniem cieczą.

W celu wykazania *warunków zaistnienia przepływu* należy przeprowadzić następujące rozumowanie. Uruchomiona pompa próżniowa, na skutek wypompowywania powietrza z lewara powoduje, że *absolutne* ciśnienie powietrza $p = p(t)$ jest malejącą funkcją czasu, przy czym $p < p_b$. Obniżające się ciśnienie powietrza w lewarze, powoduje stopniowe podciąganie cieczy ze zbiorników w obu ramionach lewara, zgodnie z prawem rozkładu ciśnienia hydrostatycznego.

Dla przeprowadzenia dowodu przez zaprzeczenie, przyjmijmy *wstępnie założenie*, że w chwili końcowej, gdy dojdzie w przekroju 3 do połączenia cieczy z obu ramion lewara, ciecz całkowicie wypełniająca lewar znajduje się w stanie spoczynku, oraz *wyobraźmy sobie* w przekroju 3 *blonę* – rozdzielającą ciecz z obu ramion lewara. W związku z tym, stosując prawo rozkładu ciśnienia hydrostatycznego dla części wznoszącej i opadającej lewara otrzymujemy:

- ciśnienie z lewej strony przekroju 3

$$p' = p_b - \gamma(z_3 - z_1)$$

- ciśnienie z prawej strony przekroju 3

$$p'' = p_b - \gamma(z_3 - z_2)$$

Ponieważ $z_1 > z_2$, to $p' > p''$. Oznacza to, że *ciecz w lewarze nie może znajdować się w stanie spoczynku, będzie przepływać w kierunku spadku ciśnienia, tzn. ze zbiornika wyższego do niższego.*

Rozpatrzmy ustalony przepływ cieczy przez lewar, tzn. gdy $z_1 - z_2 = \text{const}$. Wtedy, pisząc równanie Bernoulliego dla przekrojów 1 i 2, otrzymujemy

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{z_1 - z_2}{\sum \zeta + \lambda \frac{L}{d}} \quad (14)$$

Wobec tego, zdolność przepustowa lewara określana jest wzorem

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{\sum \zeta + \lambda \frac{L}{d}}} \quad (15)$$

gdzie wielkości d , L , k , $\sum \zeta$ oraz z_1 i z_2 są zadane. Wzór (15) wyznacza *pierwsze przybliżenie* wartości Q , przy założeniu że przepływ odbywa się w V strefie [10], tzn. gdy λ nie zależy od Re czyli od Q , i może być wyznaczony dla zadanej wartości k/d . Dokładna wartość Q może być wyznaczona z zastosowaniem *postępowania iteracyjnego*, tzn. dla wartości Q należy wyznaczyć Re i λ a następnie Q itd. Ze wzoru (15) wynika, że natężenie przepływu lewarem Q zależy od $z_1 - z_2$ oraz od geometrii lewara, natomiast *nie zależy od wartości rzędnej z_3 .*

Cechą charakterystyczną lewara jest *panujące w nim podciśnienie*. Największa wartość podciśnienia występuje w przekroju wierzchołkowym 3. W celu wyznaczenia maksymalnej wysokości podciśnienia $h_{v, \max}$ w lewarze należy napisać równanie *Bernoulli'ego* dla odcinka pomiędzy przekrojami 1 i 3, przyjmując płaszczyznę porównawczą dla z_1 :

$$z_1 + \frac{p_b}{\gamma} + \frac{w_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} + \left(\sum_1 \zeta + \lambda \frac{l_1}{d} \right) \frac{w^2}{2g} \quad (16)$$

gdzie l_1 – długość części lewara od wlotu do przekroju 3,
 w – prędkość strumienia w lewarze.

Uwzględniając to, że wielkość $w_1^2/2g$ jest pomijalnie mała, otrzymujemy

$$\frac{p_b - p_2}{\gamma} = (z_3 - z_1) + \left(1 + \sum_1 \zeta + \lambda \frac{l_1}{d}\right) \frac{w^2}{2g} \quad (17)$$

Można zauważyć, że

$$\frac{p_b - p_3}{\gamma} = h_{v \max} \quad (18)$$

Wobec tego

$$h_{v \max} = (z_3 - z_1) + \left(1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \sum_1 \zeta\right) \frac{w^2}{2g} \quad (19)$$

Wykorzystując zależność (14) wzór (19) przyjmuje postać

$$h_{v \max} = (z_3 - z_1) + (z_1 - z_2) \frac{1 + \lambda \frac{l_1}{d} + \sum_1 \zeta}{\lambda \frac{L}{d} + \sum \zeta} \quad (19')$$

We wzorze (19') współczynnik λ jest wyznaczony dla dokładnej wartości Q , wg (15).

Stosując wzór (19) lub (19') można wyznaczyć podciśnienie w dowolnym przekroju lewara, np. w przekroju x , wtedy różnicę $z_3 - z_1$ należy zastąpić wzniesieniem przekroju x ponad rzędną z_1 .

W celu przedstawienia *geometrycznej interpretacji* warunków panujących w przekroju 3, można wykorzystać równanie (16) w przekształconej postaci

$$z_1 = z_3 - \frac{p_b - p_3}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \left(\sum_1 \zeta + \lambda \frac{l_1}{d}\right) \frac{w^2}{2g} \quad (16')$$

Równanie (16') posiada geometryczną interpretację, przedstawioną na rys. 5, gdzie

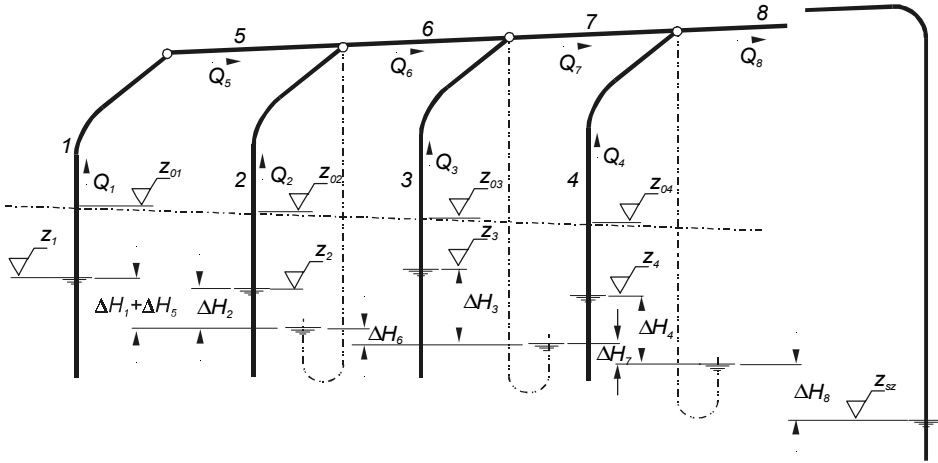
- linią przerywaną przedstawiono fikcyjny (wyobrażany) wakuometr,
- h_1 i h_2 oznaczają straty hydrauliczne odpowiednio w odcinku rury wznoszącej się i opadającej.

Ze wzoru (19) wynika, że $h_{v \max}$ jest wprost proporcjonalne do $(z_2 - z_1)$ oraz do Q^2 .

6. Równania złożonego układu lewarowego

Analiza hydraulicznych warunków działania rozważanego układu lewarowego, dla jasności zostanie ograniczona do szczególnego przypadku czterech studni (rys. 6), gdzie studnie traktowane są jako zbiorniki z określonym położeniem z_i zwierciadła wody. Przyjmujemy założenie, że

- wszystkie studnie usytuowane są w *jednorodnym złożu wodonośnym* o nachylonym płaskim zwierciadle wody, określonym wysokością H względem spągu (jak na rys. 4); rzędne pierwotnego zwierciadła w poszczególnych studniach oznaczono symbolem z_{oi} (rys. 4 i 6);
- studnie pracują w *warunkach ustalonych*, gdzie z_i jest rzędną *dynamicznego zwierciadła* wody w studniach, traktowanych jako zbiorniki, z których woda jest pobierana *i-tymi* przewodami;
- długość i usytuowanie filtru w złożu zapewniają występowanie warunków *studni zupełnych*.



Rys. 6. Geometryczna interpretacja hydraulicznych warunków działania lewara
 Fig. 6. Geometric interpretation of hydraulic condition in a siphon system activity

Dla przedstawienia geometrycznej interpretacji hydraulicznych warunków przepływu w poszczególnych przewodach rozważanego układu lewarowego, liniami przerywanymi przedstawiono wyobrażane rurki wakuometryczne. Biorąc pod uwagę jednoznaczne kierunki przepływów Q_i w poszczególnych przewodach, współzależności pomiędzy spadkami odpowiednich naporów hydraulicznych $\Delta H_i(Q_i)$ mogą być przedstawione geometrycznie jak na rys. 6. Stąd wynikają następujące równania bilansów spadków naporów hydraulicznych ΔH_i pomiędzy dwoma sąsiednimi studniami

$$\begin{aligned}
 (z_1 - \Delta H_1 - \Delta H_5) - (z_2 - \Delta H_2) &= 0 \\
 (z_2 - \Delta H_2) - (z_3 - \Delta H_3) &= \Delta H_6 \\
 (z_3 - \Delta H_3) - (z_4 - \Delta H_4) &= \Delta H_7 \\
 (z_4 - \Delta H_4) - z_{sz} &= \Delta H_8
 \end{aligned} \tag{20}$$

Dodając stronami kolejno wszystkie równania (20), ostatnie trzy i ostatnie dwa, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \Delta H_1 + \Delta H_5 + \Delta H_6 + \Delta H_7 + \Delta H_8 - z_1 + z_{sz} &= 0 \\
 \Delta H_2 + \Delta H_6 + \Delta H_7 + \Delta H_8 - z_2 + z_{sz} &= 0 \\
 \Delta H_3 + \Delta H_7 + \Delta H_8 - z_3 + z_{sz} &= 0 \\
 \Delta H_4 + \Delta H_8 - z_4 + z_{sz} &= 0
 \end{aligned} \tag{20'}$$

Natomiast w kolejnych węzłach muszą być spełnione równania bilansu strumieni

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= Q_5 \\
 Q_1 + Q_2 &= Q_6 \\
 Q_6 + Q_3 &= Q_7 \\
 Q_7 + Q_4 &= Q_8
 \end{aligned} \tag{21}$$

Podstawiając zależności (12), (21) do układu równań (20'), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 S_1 Q_1^2 + S_5 Q_1^2 + S_6(Q_1 + Q_2)^2 + S_7(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 + S_8(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_1 - z_{sz}) &= 0 \\
 S_2 Q_2^2 + S_6(Q_1 + Q_2)^2 + S_7(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 + S_8(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_2 - z_{sz}) &= 0 \\
 S_3 Q_3^2 + S_7(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 + S_8(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_3 - z_{sz}) &= 0 \\
 S_4 Q_4^2 + S_8(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_4 - z_{sz}) &= 0
 \end{aligned} \tag{22}$$

Należy zauważyć, że w hydraulicznej interpretacji w kolejnych równaniach:

- pierwsze składniki są stratami hydraulicznymi w przewodach wyprowadzających wodę z i -tej studni do zbiorczego przewodu lewarowego; natomiast
- kolejne składniki (z wyłączeniem wyrazów ostatnich) są *sumami strat hydraulicznych w kolejnych odcinkach zbiorczego przewodu lewarowego* (rys. 6), począwszy od węzła podłączenia przewodu z i -tej studni, z uwzględnieniem dopływów z kolejnych studni, do studni zbiorczej;
- ostatnie składniki ($z_i - z_{sz}$) są różnicami rzędnych zwierciadeł w i -tej studni i w studni zbiorczej, czyli spadkiem naporu hydraulicznego spływów z i -tych studni;
- związki pomiędzy różnymi rzędnymi z_{oi} oraz z_i dla i -tej studni, zgodnie z rys. 4:

$$z_{oi} - H + h_i = z_i \quad (22')$$

gdzie z_{oi} – rzędna pierwotnego zwierciadła wody, wielkość zadana;
 H – miąższość aktywnej warstwy wody, wielkość zadana;
 h_i – wysokość strumienia dopływającego do i -tej studni, obliczana wg wzoru (7), z uwzględnieniem wzajemnego oddziaływania studni;
 z_i – rzędna zwierciadła wody w studni, wchodząca do układu równań (35);

tnz. rzędne z_i są funkcjami wydajności Q_i wszystkich studni.

Można więc stwierdzić, że poszczególne równania (22) są równaniami spływu wody z i -tej studni do studni zbiorczej, z których wynika, że *suma strat hydraulicznych przepływu wody z i -tej studni do studni zbiorczej, z uwzględnieniem dopływów z kolejnych studni do lewara, równa jest różnicy rzędnych ($z_i - z_{sz}$) zwierciadeł w i -tej studni i studni zbiorczej*. Należy zauważyć, że rzędna z_{sz} zwierciadła w studni zbiorczej jest to wielkość eksploatacyjna, której wartość ustala układ pompowy, pobierający wodę ze studni zbiorczej z żądanym Q_c . W związku z tym, w dalszych wyprowadzeniach wartość tej wielkości jest wielkością stałą (niezależną od poszczególnych Q_i), która wynika z obliczeń hydraulicznych istniejącego układu pompowego lub zakładaną w procesie projektowania układu lewarowego gdy układ pompowy jeszcze nie jest zaprojektowany.

Uogólniając rozważania na dowolną ilość studni, można stwierdzić, że jest to układ N_s równań względem Q_i . Wysoki stopień nieliniowości tych równań jest spowodowany trzema faktami:

- odpowiednie sumy poszukiwane Q_i występują w kwadratach;
- oporności przewodów S_i zależą od Q_i , zgodnie ze wzorami (10) i (13), gdzie występuje logarytmiczna zależność funkcyjna Phama lub Colebrooka-White'a; oraz
- rzędne z_i są zależnościami funkcyjnymi wszystkich wielkości Q_i , wg wzoru (7).

Oznacza to, jest to układ nierozwiązywalny metodami algebraicznymi, który wymaga zastosowania jednej z metod iteracyjnych, np. metody Newtona-Raphsona dla układów równań nieliniowych.

7. Sformułowanie zagadnień obliczeniowych

Dla rozważanego układu lewarowego (rys. 6), można sformułować cztery rodzaje zadań hydraulicznego obliczania, sensowne z technicznego punktu widzenia.

Zadanie I – projektowe. Dla zadanych wartości liczbowych: całkowitej wydajności ujęcia Q_c , z_0 , N_s , z_{sz} , l_i , k_i , $\Sigma_i \zeta$; przyjmując warunek, że natężenie poboru wody ze wszystkich studni powinno być jednakowe, tzn. $Q_i = \text{idem} = Q_c/N_s$ (gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, N_s$), należy wyznaczyć d_i .

Dla obliczonych, w wyniku rozwiązania zadania I, wielkości średnic d_i należy przyjąć najbliższe średnice znormalizowane, które mogą się różnić znacznie. Ponieważ

rozwiązania zadań I i II typu hydraulicznego obliczania pojedynczych przewodów [10] są bardzo czułe na zmiany średnic, co wynika m.in. z budowy zależności funkcyjnych (9-13), wyłania się kolejne

Zadanie II – sprawdzające. Dla zadanych wartości liczbowych: $z_0, N_s, z_{sz}, d_i, l_i, k_i, \Sigma_i \zeta$; należy wyznaczyć Q_i dla wszystkich studni, uwzględniając ich oddziaływanie.

Celem zadania II jest uzyskanie danych do opracowanie oceny w jakim stopniu przyjęte średnice d_i , w oparciu o wyniki rozwiązania zadania I, będą wpływać na zmianę wydajności studni, czyli Q_c ujęcia, przy zachowaniu założonej rzędnej wartości z_{sz} .

Gdy w procesie eksploatacji zaprojektowanego lewarowego ujęcia wody wystąpi potrzeba zwiększenia poboru wody, o wartość ΔQ_c , wtedy powstaje konieczność rozwiązania dwóch alternatywnych rodzajów niżej sformułowanych zadań obliczeniowych.

Zadanie III – eksploatacyjne. Dla zadanych wartości liczbowych: z_0, N_s (taka sama ilość), $d_i, l_i, k_i, \Sigma_i \zeta, Q_c + \Delta Q_c$; należy wyznaczyć obniżoną rzędną zwierciadła wody z_{sz} w studni zbiorczej oraz zmienione natężenia poboru wody Q_i z poszczególnych studni – w celu sprawdzenia czy nie zostanie przekroczona dopuszczalna ich wydajność, wywołująca proces ich kolmatacji.

Zadanie IV – eksploatacyjne. Dla zadanych wartości liczbowych $z_0, d_i, l_i, k_i, \Sigma_i \zeta, Q_c + \Delta Q_c, z_{sz}$; należy wyznaczyć ile studni należy dobudować, aby wydajności dotychczasowych studni pozostały jak najmniej zmienione oraz rzeczywiste wydajności Q_i wszystkich studni.

Można zauważyć, że zadanie I. wymaga rozwiązania układu równań liniowych względem ΔH_i , a następnie dla każdego ΔH_i rozwiązania zadania III typu [10] w celu wyznaczenia d_i . Poniżej zostanie przedstawiony algorytm rozwiązywania zadań II rodzaju. Można zauważyć, że algorytmy rozwiązywania zadań III i IV rodzaju będą modyfikacją algorytmu zadania II.

8. Metody rozwiązania zadania sprawdzającego (II rodzaju)

Rozwiązanie rozważanego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania układu równań (22) względem Q_i , które charakteryzują się wysokim stopniem nieliniowości.

Ogólna procedura metody Newtona-Raphsona. W celu zastosowania tej metody, należy zauważyć, że w układzie równań (22) lewe strony kolejnych równań, odnoszących się odpowiednio do i -tej studni, są funkcjami F_i różnych wartości wielkości Q_i wszystkich studni. Wobec tego, układ równań (22) można ogólnie zapisać jako

$$F_i(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_i, \dots, Q_{N_s}) = 0 \quad (24)$$

Zakładamy pierwsze przybliżenia $Q_i^{(1)}$ spełniające równania (24) bilansu Q_i dla wszystkich węzłów, np. $Q_1^{(1)} = Q_2^{(1)} = Q_3^{(1)} = Q_4^{(1)} = \dots = Q_c/N_s$, pamiętając, że Q_c jest wartością oczekiwanej całkowitej wydajności ujęcia. W związku z tym konieczne jest wprowadzenie poprawek $\Delta Q_i^{(1)}$, tak dobranych aby drugie przybliżenia (poprawione)

$$Q_i^{(2)} = Q_i^{(1)} + \Delta Q_i^{(1)} \quad (25)$$

spełniały równania (24), a tym samym (22). Wobec tego, w układzie równań

$$F_i(Q_1^{(1)} + \Delta Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)} + \Delta Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)} + \Delta Q_3^{(1)}, \dots) = 0 \quad (26)$$

poprawki $\Delta Q_i^{(1)}$ są nowymi wielkościami, które należy wyznaczyć. Rozwijając funkcje F_i występujące w (26) w szereg Taylora, zachowując tylko wyrazy z pierwszymi pochodnymi, otrzymujemy

$$F_i(Q_1^{(1)} + \Delta Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)} + \Delta Q_2^{(1)}, \dots) = F_i(Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, \dots) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial Q_1^{(1)}} \Delta Q_1^{(1)} + \frac{\partial F_i}{\partial Q_2^{(1)}} \Delta Q_2^{(1)} + \dots \right) \quad (27)$$

Podstawiając do (27) warunek (26), otrzymujemy układ przybliżonych równań liniowych względem poprawek $\Delta Q_i^{(1)}$

$$F_i(Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}, \dots) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial Q_1^{(1)}} \Delta Q_1^{(1)} + \frac{\partial F_i}{\partial Q_2^{(1)}} \Delta Q_2^{(1)} + \frac{\partial F_i}{\partial Q_3^{(1)}} \Delta Q_3^{(1)} + \dots \right) = 0 \quad (28)$$

Współczynniki występujące przy poprawkach $\Delta Q_i^{(1)}$ są odpowiednimi pochodnymi funkcji F_i względem Q_i obliczonymi dla $Q_i^{(1)}$. Ponieważ w rozwinięciach funkcji F_i w szeregi pominięto wyrazy z pochodnymi wyższych rzędów, równania mają charakter równań przybliżonych. Dlatego konieczne jest zastosowanie iteracyjnej procedury kolejnych przybliżeń.

Rozwiązując układ (28) N_s równań liniowych względem poprawek $\Delta Q_i^{(1)}$, następnie wg wzorów (25) można wyznaczyć zbiór wartości drugich przybliżeń $Q_i^{(2)}$ natężeń poboru wody ze studni. W celu wyznaczenia trzecich przybliżeń $Q_i^{(3)}$ należy wprowadzić drugie przybliżenia poprawek $\Delta Q_i^{(2)}$

$$Q_i^{(3)} = Q_i^{(2)} + \Delta Q_i^{(2)} \quad (25^*)$$

dla wyznaczenia których należy powtórzyć procedurę przedstawioną powyżej.

W równaniach (28) wartości funkcji $F_i(Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}, \dots)$ wyrażają odchyłki spełnienia równań (28) spowodowane dowolnym przyjęciem pierwszych przybliżeń $Q_i^{(1)}$. Oznaczając tę odchyłkę dla i -tego równania przez $\Delta h_i^{(1)}$, otrzymujemy

$$\Delta h_i^{(1)} = F_i(Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}, \dots) \quad (29)$$

Dla wyników kolejnych przybliżeń, wg wzoru (29) należy obliczać odpowiednie odchyłki dla wszystkich równań rozwiązywanego układu (28). W związku z tym, kryterium zakończenia procesu iteracyjnego przyjmuje postać

$$\max_i |F_i(Q_1^{(n)}, Q_2^{(n)}, Q_3^{(n)}, \dots)| < \delta \quad (30)$$

gdzie δ jest to założona mała wartość dopuszczalnej odchyłki $\Delta h_i^{(n)}$ wspólna dla wszystkich równań. Po lewej stronie kryterium występuje maksymalna wartość odchyłki wybrana ze zbioru odpowiednich wartości dla wszystkich równań, obliczonych dla wyników n -tego przybliżenia.

Zastosowanie metody do układu 4 studni. W celu wyjaśnienia zastosowania powyżej przedstawionej ogólnej procedury postępowania wg metody Newtona, bez ograniczania ogólności rozważań, zostanie przyjęte lewarowe ujęcie wód podziemnych z 4 studni, jak na rys. 6. Dla takiego układu, do rozwiązania rozważanego zagadnienia hydraulicznego należy zastosować układu równań (22). Lewe strony tych równań są funkcjami $F_i(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$, przyjmującymi postać

$$\begin{aligned} F_1 &= S_1 Q_1^2 + S_2 Q_2^2 + S_6 (Q_1 + Q_2)^2 + S_7 (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 + S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_1 - z_{sz}) \\ F_2 &= S_2 Q_2^2 + S_6 (Q_1 + Q_2)^2 + S_7 (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 + S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_2 - z_{sz}) \\ F_3 &= S_3 Q_3^2 + S_7 (Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 + S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_3 - z_{sz}) \\ F_4 &= S_4 Q_4^2 + S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)^2 - (z_4 - z_{sz}) \end{aligned} \quad (31)$$

lub po wprowadzeniu operatorów sumowania, dla pierwszych przybliżeń $Q_i^{(1)}$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= S_1 (Q_1^{(1)})^2 + S_5 (Q_1^{(1)})^2 + S_6 \left(\sum_{j=1}^2 Q_j^{(1)} \right)^2 + S_7 \left(\sum_{j=1}^3 Q_j^{(1)} \right)^2 + S_8 \left(\sum_{j=1}^4 Q_j^{(1)} \right)^2 - (z_1 - z_{sz}) \\
 F_2 &= S_2 (Q_2^{(1)})^2 + S_6 \left(\sum_{j=1}^2 Q_j^{(1)} \right)^2 + S_7 \left(\sum_{j=1}^3 Q_j^{(1)} \right)^2 + S_8 \left(\sum_{j=1}^4 Q_j^{(1)} \right)^2 - (z_2 - z_{sz}) \\
 F_3 &= S_3 (Q_3^{(1)})^2 + S_7 \left(\sum_{j=1}^3 Q_j^{(1)} \right)^2 + S_8 \left(\sum_{j=1}^4 Q_j^{(1)} \right)^2 - (z_3 - z_{sz}) \\
 F_4 &= S_4 (Q_4^{(1)})^2 + S_8 \left(\sum_{j=1}^4 Q_j^{(1)} \right)^2 - (z_4 - z_{sz})
 \end{aligned}
 \tag{31'}$$

Rzędna z_i zwierciadła wody w i -tej studni (rys.4), określona jest zależnością (22').

Z warunku wystąpienia przepływu w lewarze wynika, że zawsze $z_i > z_{sz}$.

Wstępnie, wartości S_i mogą być obliczone dla pierwszych przybliżeń $Q_i^{(1)}$, a następnie mogą być poprawiane dla kolejnych przybliżeń $Q_i^{(n)}$. Wobec tego, przy obliczaniu odpowiednich pochodnych funkcji F_i wielkości S_i będą traktowane jako stałe. Należy pamiętać, że w rozważanym zagadnieniu z_{sz} jest zadaną wartością, natomiast z_i są funkcjami Q_i – wg wzoru (7).

Wobec tego, pochodne cząstkowe występujące w kolejnych równaniach układu (28) dla wyznaczenia pierwszych poprawek $\Delta Q_i^{(1)}$, należy wyznaczyć dla funkcji (31). Np. dla funkcji F_1 pochodne przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} &= 2S_1 Q_1 + 2S_5 Q_1 + 2S_6 (Q_1 + Q_2) + 2S_7 (Q_1 + Q_2 + Q_3) + 2S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) - \frac{\partial z_1}{\partial Q_1} \\
 \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} &= 2S_6 (Q_1 + Q_2) + 2S_7 (Q_1 + Q_2 + Q_3) + 2S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) - \frac{\partial z_1}{\partial Q_2} \\
 \frac{\partial F_1}{\partial Q_3} &= 2S_7 (Q_1 + Q_2 + Q_3) + 2S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) - \frac{\partial z_1}{\partial Q_3} \\
 \frac{\partial F_1}{\partial Q_4} &= 2S_8 (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4) - \frac{\partial z_1}{\partial Q_4}
 \end{aligned}
 \tag{32i}$$

Podobnie należy wyznaczyć pochodne dla pozostałych funkcji F_2, F_3 i F_4 .

Natomiast, biorąc pod uwagę zależność (22') oraz wzór (7), można obliczyć pochodne

$$\frac{\partial z_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial h_i}{\partial Q_j} = \frac{-\frac{1}{\pi k} (\ln R - \ln \rho_{ij})}{2 \sqrt{H^2 - \frac{1}{\pi k} \left[\left(\sum_{j=1}^{N_s} Q_j \right) \ln R - \sum_{j=1}^{N_s} Q_j \ln \rho_{ij} \right]}}
 \tag{33}$$

Należy zauważyć, że w mianowniku pierwszego wzoru (33) znajduje się podwojona wartość funkcji h_i , wg (7). Natomiast w liczniku występuje wielkość stała, zależna od k, R oraz zadanych odległości ρ_{ij} . Wprowadzając oznaczenie

$$A_{ij} = \frac{1}{2\pi k} (\ln R - \ln \rho_{ij})
 \tag{34}$$

otrzymujemy proste wyrażenie dla poszukiwanej pochodnej

$$\frac{\partial z_i}{\partial Q_j} = -\frac{A_{ij}}{h_i}
 \tag{33'}$$

Dla szczególnego przypadku, gdy $j = i$, wykorzystując wzór (6'), otrzymujemy $\rho_{ii} = r$, a tym samym

$$A_{ii} = \frac{1}{2\pi k} (\ln R - \ln r) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial z_i}{\partial Q_i} = -\frac{A_{ii}}{h_i} \quad (34') \text{ oraz } (33'')$$

W związku z tym, podstawiając (31'), (32) i (33') lub (33'') do ogólnego układu równań (28) oraz wprowadzając operatory sumowania Q_i , otrzymujemy układ 4 równań liniowych dla wyznaczenia pierwszych przybliżeń 4 poprawek $\Delta Q_i^{(1)}$. Np. pierwsze równanie, dla $i = 1$, przyjmuje postać

$$\begin{aligned} S_1 (Q_1^{(1)})^2 + S_5 (Q_1^{(1)})^2 + S_6 \left(\sum_{i=1}^2 Q_i^{(1)} \right)^2 + S_7 \left(\sum_{i=1}^3 Q_i^{(1)} \right)^2 + S_8 \left(\sum_{i=1}^4 Q_i^{(1)} \right)^2 - (z_1 - z_{sc}) + \\ + 2 \left((S_1 + S_5) Q_1^{(1)} + S_6 \sum_{i=1}^2 Q_i^{(1)} + S_7 \sum_{i=1}^3 Q_i^{(1)} + S_8 \sum_{i=1}^4 Q_i^{(1)} + \frac{A_{11}}{2h_1} \right) \Delta Q_1^{(1)} + \\ + 2 \left(S_6 \sum_{i=1}^2 Q_i^{(1)} + S_7 \sum_{i=1}^3 Q_i^{(1)} + S_8 \sum_{i=1}^4 Q_i^{(1)} + \frac{A_{21}}{2h_1} \right) \Delta Q_2^{(1)} + \\ + 2 \left(S_7 \sum_{i=1}^3 Q_i^{(1)} + S_8 \sum_{i=1}^4 Q_i^{(1)} + \frac{A_{31}}{2h_1} \right) \Delta Q_3^{(1)} + \\ + 2 \left(S_8 \sum_{i=1}^4 Q_i^{(1)} + \frac{A_{41}}{2h_1} \right) \Delta Q_4^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

Podobnie postępując, otrzymujemy pozostałe równania dla $i = 2, 3$ i 4 .

Uogólnienie zapisu metody dla dowolnej ilości studni – dla przystosowania metody do opracowania algorytmów automatycznej realizacji obliczeń komputerowych. W tym celu można wykorzystać występujące *prawidłowości w budowie wzorów* (31'), (32) oraz w równaniach (35).

W szczególności, jak już zauważono, *we wzorach (31'), pierwsze składniki wyrażają spadek naporu w przewodach łączących i-tą studnię w węzłem lewara, kolejne składniki – spadek naporu w kolejnych odcinkach lewara – od połączenia i-tej studni aż do studni zbiorczej*. Wobec tego, wykorzystując odpowiednie oznaczenia można uzyskać uogólniony zapis układu wzorów (31') dla N_s studni

$$F_i = S_i Q_i^2 + \sum_{k=N_s+i}^{2N_s} S_k \left(\sum_{j=1}^{k-N_s} Q_j \right)^2 - (z_i - z_{sc}) \quad (36)$$

Analizując budowę wyrażeń (32), także można uogólnić ich zapis. W tym celu pomocne jest wprowadzenie *współczynnika dwu wskaźnikowego* – tzw. *symbolu Kroneckera*

$$K_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } j = i \\ 0 & \text{gdy } j \neq i \end{cases}$$

oraz liczby m – wielkość maksymalna ze wskaźników i oraz j , tzn. $m = \max(i, j)$.

Wtedy wyrażenia (32) *pochodnych cząstkowych* przyjmują uogólnioną postać

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_j} = K_{ij} \cdot 2S_i Q_i + 2 \sum_{k=N_s+m}^{2N_s} S_k \sum_{l=1}^{k-N_s} Q_l + \frac{A_{ij}}{h_i} \quad (37)$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots, N_s$; $j = 1, 2, \dots, N_s$.

Podstawiając wyrażenia (37) do równań (35), po uwzględnieniu wyrażań (36), uogólniony zapis układu N_s liniowych równań, względem poszukiwanych pierwszych poprawek $\Delta Q_i^{(1)}$, przyjmuje postać

$$S_i (Q_i^{(1)})^2 + \sum_{k=N_s+i}^{2N_s} S_k \left(\sum_{j=1}^{k-N_s} Q_j^{(1)} \right)^2 - (z_i - z_{sz}) + 2 \sum_{j=1}^{N_s} \left(K_{ij} \cdot S_i Q_i^{(1)} + \sum_{k=N_s+m}^{2N_s} S_k \sum_{l=1}^{k-N_s} Q_l^{(1)} + \frac{A_{ij}}{2h_i} \right) \cdot \Delta Q_i^{(1)} = 0 \quad (38)$$

gdzie rzędne $z_i = z_{oi} - H + h_i$ wg (22'), przy czym wysokości h_i są funkcjami wg wzoru (7).

Po wyznaczeniu z układu równań (38) zbioru N_s pierwszych poprawek $\{\Delta Q_i^{(1)}\}$ należy wyznaczyć zbiór drugich przybliżeń poszukiwanych wielkości $\{Q_i^{(2)}\}$ wg wzoru (25). Dla kolejnych przybliżeń $\{Q_i^{(n)}\}$ należy sprawdzać kryterium zakończenia procesu iteracyjnego (30), które w rozwiniętym zapisie (36) przyjmuje postać

$$\max_i \left| S_i (Q_i^{(n)})^2 + \sum_{k=N_s+i}^{2N_s} S_k \left(\sum_{j=1}^{k-N_s} Q_j^{(n)} \right)^2 - (z_i^{(n)} - z_{sz}) \right| < \delta \quad (30')$$

9. Wnioski i uwagi końcowe

Przedstawiona metoda obliczania złożonych układów lewarowych ujęć wód podziemnych, po uzupełnieniu odpowiednim algorytmem obliczeń – z wykorzystaniem standardowych programów komputerowych rozwiązywania układów nieliniowych równań algebraicznych, może być wykorzystywana do komputerowych badań symulacyjnych własności hydraulicznych rozważanych układów (co zostało przedstawione w kolejnym referacie) oraz do inżynierskich zastosowań w zakresie projektowania i eksploatacji. Na uwagę zasługują także wartości kształtujące i dydaktyczne metody.

Wykaz oznaczeń i symboli

$d_i, k_i, \Sigma_i \zeta$ – średnica wewnętrzna, chropowatość bezwzględna wewnętrznych ścian i suma współczynników oporów lokalnych *i-tego* przewodu;

δ – wartość dopuszczalnej odchyłki $\Delta h_i^{(n)}$, wspólnej dla wszystkich równań układu;

h_i – wysokość strumienia dopływającego do *i-tej* studni (rys. 1 i 4);

K_{ij} – symbol Kroneckera, współczynnik dwu wskaźnikowy zero-jedynkowy;

l_i – geometryczna długość *i-tego* przewodu;

L_i – obliczeniowa długość *i-tego* przewodu; wyznaczona wg wzoru $L = l + l_2$;

l_2 – długość zastępcza, obliczana wg wzoru (11);

λ – współczynnik liniowych strat hydraulicznych, zależny od Q , obliczany wg wzoru (10);

$\Delta h_i^{(n)}$ – odchyłka spełnienia *i-tego* równania układu (29) w *n*-tym przybliżeniu;

ΔH_i – spadek naporu hydraulicznego w *i*-tym przewodzie; wyrażany $\Delta H_i = S_i Q_i^2$;

N_s – ilość studni oraz ilość *i-tych* przewodów łączących studnie z lewarem;

N_w – ilość węzłów $N_w = N_s$

N_r – ilość przewodów rurowych (wszystkich) $N_r = N_s + N_1 = 2N_s$

N_1 – ilość (*i*-tych) przewodów lewara $N_1 = (N_s - 1) + 1 = N_s$

Q_i – wydajność *i-tej* studni lub natężenie przepływu w *i*-tym przewodzie;

$\Delta Q_i^{(n)}$ – *n*-ta poprawka natężenia poboru wody z *i-tej* studni;

Q_j – wydajności *j-tych* studni;

- Q_c – wymagana całkowita wydajność ujęcia wody, spełniająca warunek $Q_c = \Sigma Q_i$ dla studni;
 r – promień studni;
 R – promień zasięgu leja depresyjnego wokół studni;
 ρ_{ij} – odległości j -tej studni od i -tej studni;
 s_i – depresja hydrauliczna i -tej studni (rys. 1);
 Δs_i – wysokość strat hydraulicznych filtra i -tej studni i strefy przyfiltrkowej (rys. 1); wyznaczana empirycznie w procesie próbnych pompowań studni; wyrażana wzorem $\Delta s_i = S_{fi} Q_i^2$;
 S_{fi} – oporność filtra i -tej studni;
 S_i, S_k – oporność i -tego lub k -tego przewodu o długości L_i lub L_k ; obliczana wg wzoru (13);
 z_i – rzędna dynamicznego zwierciadła wody w i -tej studni;
 z_{di} – rzędna dolnego końca filtra i -tej studni;
 z_{sz} – rzędna zwierciadła wody w studni zbiorczej.

Indeksy: dolne lub górne wskaźniki:

- i – numery studni i przewodów łączących studnie z lewarem; $i = 1, 2, 3, \dots, N_s$; lub wskaźnik odnoszący do wydajności i -tej studni, np. z_i, h_i w (7), F_i w (31');
 j – wskaźnik odnoszący się do wydajności wszystkich studni;
 k – numery kolejnych odcinków głównego przewodu lewara począwszy od węzła 1;
 $k = N_s + 1, N_s + 2, \dots, 2N_s$;
 l – wskaźnik pomocniczy odnoszący się do wydajności wszystkich studni;
 m – maksymalna wartość z dwóch wskaźników i oraz j ; $m = \max(i, j)$;
 (n) – górny wskaźnik, oznaczający n -te przybliżenie.

Bibliografia

- [1] Altszul A.Ch. i dr.: *Regulirovanie zasopov podzemnych wod.* Moskwa 1977, Kołos.
- [2] Bakłanov V.D.: *Vlijanie vozducha na gidravliczeskij rasczet sifonnych vodosbrosov.* Vodosnabżenie i sanitarnaja technika. 1936, Nr 9, 9-13.
- [3] Bear J., Zaslavsky D., Irmay S.: *Physical principles of water percolation and seepage.* UNESCO 1968. [tłum. na j.ros.: *Fiziko-matematyczne osnowy filtracji vody.* MIR, 1971, 450 s.].
- [4] Biswas A.K.: *Historia hydrologii.* Tłum. z j.ang. Warszawa 1978, PWN, s. 380
- [5] Błaszyk T., Schmidt E., Stelmach M.: *Koncepcje zasilania wód podziemnych.* Warszawa 1977, IKŚ, 64 s.
- [6] Boczever F.M., Verigin N.N.: *Metodiceskije posobie po rasczetam ekspluatacionnych zasopov podzemnych dlja vodosnabżenija.* Moskwa 1961.
- [7] Boczever F.M. i dr.: *Osnovy gidrogeologiczeskich rasczetov.* Moskwa 1969, Nedra.
- [8] Forchheimer Ph.: *Hydraulik.* Leipzig, Berlin 1930, B.G. Teubner, 3 Auflage, s. 542 (istnieje tłum. na j.ros.: Forchgejmer F.: *Gidravlika.* Moskwa 1935, ONTI).

- [9] Gabryszewski T., Wieczysty A.: *Ujęcia wód podziemnych*. Warszawa 1985, Arkdy.
- [10] Grabarczyk C.: *Przepływy cieczy w przewodach. Metody obliczeniowe*. Poznań 1997, Envirotech.
- [11] Grabarczyk C., Ciesielski J.: O matematycznych podstawach metody Freemana graficznego rozwiązywania układów hydraulicznych. *Gaz Woda i Technika Sanitarna*. Tom 52, 1978, Nr 1, 3-5.
- [12] Grabarczyk C.: *Hydraulika bezzaworowych filtrów samopluczących sterowanych lewarem*. Międzynarodowa Konferencja Naukowo-Techniczna Zaopatrzenie w wodę miast i wsi. Poznań 1994, s. 601-615.
- [13] Maliszewskij N.G.: *Novoje o ponimani principov dejstva sifonov*. Doklady AN SSSR. Vol. 150, 1955, Nr 4, 666-671.
- [14] Matakiewicz M.: *Wodociąg ze sztuczną wodą gruntową i ekspertyza poznańska*. Przegląd Gazowniczy i Wodociągowy. Vol. III, 1923, Nr 6, 130-138.
- [15] Mielcarzewicz E.: *Obliczanie systemów zaopatrzenia w wodę*. Warszawa 2000, Arkady.
- [16] Paavel V., Koch R.: *Berechnung von Brunnengalerien mit Heberleitung*. Bohrtechnik, Brunnenbaum, Rohrleitung. Vol. 13, 1962, Nr 8, 373-384; Nr 9, 434-442.
- [17] Piotrowski I.: *Odpowietrzanie długich lewarów*. *Gaz, Woda i Technika Sanitarna*. Vol. 24, 1950, Nr 3, 91-94.
- [18] Przybyłek J.: *Hydrogeologiczna ocena sprawności infiltracyjnego ujęcia wody „Dębina” w Poznaniu przed kolizją z projektowaną autostradą A2*. W: Współczesne Problemy Hydrogeologii. Tom VIII, 1997, s. 95-102.
- [19] Przybyłek Jan: *Ujęcie wody Dębina*. *Kronika Miasta Poznania*, 2004, Nr 1, 379-396.
- [20] Rygaleva V.D.: *Novye dannye o dejstvi sifonov*. *Vodosnabżenie i sanitarnaja technika*. 1958, Nr 5.
- [21] Rouse H., Ince S.: *History of hydraulics*. Iowa City 1980, IIHR.
- [22] Sawaszyński J.: *Graficzne metody obliczania studziennych przewodów lewarowych i tłocznych*. *Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej; Budownictwo*, Nr 15; *Inżynieria Sanitarna*; 1960, s. 121-145.
- [23] Walther G., Günthert F. W.: *Neue Untersuchungen zur Selbstentlüftungs-geschwindigkeit in Trinkwasserleitungen*. *GWF Wasser-Abwasser*. Vol. 139, 1998, Nr 8, 475-81
- [24] PN-76/M-34034 *Rurociągi. Zasady obliczeń strat ciśnienia*.