Marek MIKA, Grzegorz WALIGÓRA

Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska

MODEL I ALGORYTMY ROZWIĄZYWANIA PROBLEMU ROZDZIAŁU ZASOBÓW Z ZASOBAMI PRZETWARZANYMI I SIECIĄ TRANSPORTOWĄ

A MODEL AND ALGORITHMS FOR THE RESOURCE-CONSTRAINED PROJECT SCHEDULING PROBLEM WITH CHANGEOVER RESOURCES AND TRANSPORTATION NETWORK

The resource-constrained project scheduling problem with changeover resources and transportation network is considered. In this problem a set of nonpreemptable activities, which are precedence related are executed using some scarce renewable and nonrenewable resources. These resources are placed in several geographically distributed localizations. Localizations may differ among themselves in types and availabilities of resources. Moreover, another type of resources called changeover resources is considered. These resources may be moved between locations. All locations are connected via transportation network, where each connection between a pair of locations is characterized by a set of parameters. There are two types of operations: activities and transfers. Activities are executed in a given location using renewable and nonrenewable resources placed in this location. Moreover, some co-called changeover resources are processed by activities. Transfers use connections of the transportation network to move some changeover resources from one location to another one. A general and extensible mathematical model of this problem is proposed. Finally, three algorithms developed to find a feasible resource allocation for all activities of the entire project are presented.

1. Wprowadzenie

Współczesny decydent często ma do czynienia z coraz bardziej skomplikowanymi sytuacjami. Niejednokrotnie musi on podejmować decyzje dotyczące zadań składających się ze zbioru wzajemnie powiązanych czynności. Każda z tych czynności na ogół wymaga użycia innych zasobów, a zasoby te często znajdują się w różnych, geograficznie rozproszonych lokalizacjach, które mogą różnić się od siebie pod względem typów i/lub dostępności znajdujących się w nich zasobów. Lokalizacje połączone są wzajemnie za pośrednictwem połączeń tworzących tzw. sieć transportową. Poszczególne połączenia tej sieci mogą różnić się od siebie parametrami. Wzajemne powiązanie czynności, określające częściowy porządek ich wykonywania, częstokroć wynika z faktu, że kolejne czynności polegają na przetwarzaniu pewnego zasobu, który trafia w pewnej postaci na wejście jednej czynności, a po wykonaniu tej czynności pojawia się na jej wyjściu w postaci przetworzonej, która wymagana jest na wejściu innej czynności. Zasób taki nazywać będziemy zasobem przetwarzanym. Jeżeli przyjmiemy, że dwie następujące po sobie czynności nie mogą być wykonane w tej samej lokalizacji, ze względu na brak odpowiednich zasobów, to wówczas muszą być one wykonane w dwóch różnych lokalizacjach, co pociąga za sobą konieczność przetransportowania zasobu przetwarzanego pomiędzy tymi lokalizacjami. Taką czynność będziemy nazywać przesyłem zasobu przetwarzanego. Może ona charakteryzować się pewnymi wymaganiami wobec połączeń sieci transportowej, co prowadzi do tego, że połączenia o parametrach niższych niż wymagane nie mogą posłużyć do przetransportowania danego zasobu przetwarzanego. W pracy prezentujemy sposób zamodelowania tego problemu korzystający z klasycznej teorii rozdziału zasobów. Przedstawiony model jest ogólny i może w łatwy sposób zostać zaadaptowany do dowolnego problemu o podobnej naturze. Sieć transportową może stanowić na przykład rozbudowany rurociąg, w którym poszczególne połączenia mogą różnić się takimi parametrami jak średnica rury, czy też ciśnienie robocze. Zasobem przetwarzanym może być wówczas dowolna ciecz, np. woda, a zasoby w poszczególnych lokalizacjach będą odpowiedzialne za właściwe przetworzenie tej cieczy.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z rozbudowaną siecią transportową, w której poszczególne połączenia różnią się od siebie parametrami, a lokalizacje są zróżnicowane pod względem typów i dostępności zasobów, samo zadanie decyzyjne składa się z wielu powiązanych kolejnościowo czynności. Ponadto, gdy w tym problemie dostępność zasobowa oraz parametry poszczególnych połączeń są bardzo zbliżone do wymagań odpowiednich czynności, to wówczas znalezienie jakiegokolwiek dopuszczalnego przydziału zasobów do poszczególnych czynności jest zadaniem trudnym nawet dla doświadczonego decydenta.

Zatem, oprócz sposobu zamodelowania tego problemu, który przedstawiony zostanie w następnym punkcie, pokazujemy również w ujęciu algorytmicznym sposób sprawdzenia, czy istnieje jakikolwiek dopuszczalny przydział zasobów do poszczególnych czynności, który gwarantuje wykonanie całego zadania przy spełnieniu wszystkich ograniczeń. Jest to tematem trzeciego punktu tej pracy, w którym prezentujemy również sposób wyznaczania takich przydziałów w przypadku, gdy jakikolwiek przydział istnieje, a także algorytm losowy, który wyznaczy konkretny dopuszczalny przydział zasobów.

2. Model

Rozważany problem zamodelowano w oparciu o klasyczną teorię rozdziału zasobów. Przegląd różnych algorytmów i modeli i innych zagadnień związanych z tą klasą problemów można między innymi znaleźć w następujących pracach: [1]-[11], [13]-[15][17] oraz[19][20].

Rozważane zadanie, które ze względu na swoją strukturę nazywać będziemy projektem, składa się ze zbioru V = $\{A_1,\ldots, A_n\}$ niepodzielnych czynności. Pomiędzy niektórymi czynnościami projektu występują ograniczenia kolejnościowe, co oznacza, że wykonywanie pewnej czynności może się rozpocząć dopiero po zakończeniu czynności, które ją poprzedzają. Kolejność wykonywania poszczególnych czynności wynikająca z występowania ograniczeń kolejnościowych określona jest przez strukturę projektu graficznie przedstawianą w postaci sieci czynności o reprezentacji wierzchołkowej. W tej reprezentacji czynności występują jako wierzchołki a ograniczenia kolejnościowe jako łuki spójnego i acyklicznego grafu skierowanego G = (V, E). Zakłada się, że graf ten ma dokładnie jeden wierzchołek początkowy i dokładnie jeden wierzchołek końcowy oraz że wierzchołki są zaetykietowane w porządku topologicznym, czyli etykieta dowolnego wierzchołka jest zawsze większa od etykiet jego wszystkich poprzedników oraz mniejsza od etykiet jego wszystkich następników. Przez Pred(A_j) oraz Succ(A_j) oznaczamy odpowiednio zbiór wszystkich bezpośrednich poprzedników i bezpośrednich następników czynności A_j. Każda czynność wymaga do swej realizacji pewnych zasobów, które na ogół dostępne są w ograniczonej ilości. Dwie podstawowe kategorie zasobów są rozważane: odnawialne i nieodnawialne. Zasoby odnawialne rozmieszczone w wielu geograficznie rozproszonych lokalizacjach. Dostępność poszczególnych typów zasobów odnawialnych może się różnić pomiędzy różnymi lokalizacjami. Zasoby odnawialne oznaczane są jako R_k^{μ} a zasoby nieodnawialne jako R_k^{η}, gdzie indeks k, $k = 1, 2, \ldots$, oznacza k-ty typ zasobu odnawialnego lub nieodnawialnego. Ponadto, rozważana jest jeszcze jedna kategoria zasobowa dotycząca tzw. zasobów przetwarzanych[18]. Cechą charakterystyczną takich zasobów jest to, że nie są one związane na stałe z żadną lokalizacją i mogą być przesyłane pomiędzy poszczególnymi lokalizacjami, o ile istnieje pomiędzy nimi odpowiednie połączenie. Często zasoby te w trakcie wykonywania danej czynności są przetwarzane, czyli na wejście czynności trafiają w pewnej postaci, a na jej wyjściu pojawiają się w postaci już zmodyfikowanej, potrzebnej na wejściu innej czynności. Zasoby tego typu oznaczamy przez R_k^{ν}, $k = 1, 2, \ldots$. Podobnie jak w poprzednim przypadku indeks k oznacza tutaj k-ty typ zasobu.

Sieć transportowa jest reprezentowana przez nieskierowany graf Γ = (N, Ψ) odpowiadający topologii połączeń sieci. Ψ jest zbiorem krawędzi reprezentujących połączenia między węzłami grafu Γ, $\Psi = \{(\mu,\nu)_{\psi}: \mu \in \mathrm{N}, \psi = 1, 2, \ldots\}$, gdzie indeks ψ stosowany jest w celu rozróżnienia różnych połączeń pomiędzy tą samą parą węzłów. N jest zbiorem wszystkich węzłów grafu i jest on podzielony na dwa rozłączne podzbiory X oraz Π. Zbiór X reprezentuje wszystkie lokalizacje, w których znajdują się zasoby, o które ubiegają się czynności projektu. Natomiast zbiór Π zawiera pozostałe lokalizacje, w których chociaż zasobów nie występują, to jednak muszą być uwzględnione dlatego, że w tych węzłach zbiegają się co najmniej trzy połączenia sieci transportowej. Mówiąc bardziej obrazowo, zbiór X jest zbiorem miejsc, w których następuje przetwarzanie, czyli lokalizacji docelowych, a zbiór Π jest zbiorem skrzyżowań sieci transportowej, czyli lokalizacji pośrednich. $P_{k\chi}^{\mu}$ oznacza liczbę jednostek zasobu odnawialnego R_k^{μ}, jaka jest dostępna w lokalizacji X_{χ}. Wówczas $P_k^{\mu} = \sum_{\chi=1}^{|\mathrm{X}|} P_{k\chi}^{\mu}$ oznacza sumaryczną liczbę jednostek zasobu odnawialnego R_k^{μ}, jaką dysponujemy w całym projekcie. Natomiast, P_k^{η} oznacza liczbę jednostek zasobu nieodnawialnego R_k^{η}, jaka jest dostępna w całym projekcie. Zakładamy, że zasoby nieodnawialne, w odróżnieniu od zasobów odnawialnych, nie są przypisane do danej lokalizacji, lecz mogą być pobierane z całkowitej puli w dowolnej lokalizacji. Takie podejście ma bardzo praktyczne uzasadnienie jeżeli jako przykład zasobu nieodnawialnego posłużą źródła zasilania lub też pieniądze. Oczywiście, możliwe jest również podejście, w którym zasoby nieodnawialne będą powiązane z lokalizacjami, co można w łatwy sposób uwzględnić w modelu. W takim przypadku $P_{k\chi}^{\eta}$ oznacza liczbę jednostek zasobu odnawialnego R_k^{η}, jaka jest dostępna w lokalizacji X_χ. Wówczas $P_k^{\eta} = \sum_{\chi=1}^{|\mathrm{X}|} P_{k\chi}^{\eta}$ oznacza sumaryczną liczbę jednostek zasobu odnawialnego R_k^{η}, jaka jest dostępna w całym projekcie.

Dla każdego połączenia $(\mu, \nu)\psi$ są określone dwa parametry: waga $\omega_{\psi}^{\mu\nu}$ oraz zbiór $\Omega_{\psi}^{\mu\nu}$. Waga $\omega_{\psi}^{\mu\nu}$ odpowiada parametrowi połączenia, który bezpośrednio wpływa na czas potrzebny do przesłania wymaganej ilości zasobu odpowiedniego przetwarzanego. Może to być na przykład długość lub szerokość takiego połączenia. Zbiór $\Omega_{\psi}^{\mu\nu}$ jest zbiorem wszystkich ograniczeń dla połączenia $(\mu, \nu)_{\psi}$. Przykładami, takich ograniczeń mogą być maksymalna dopuszczalna prędkość, maksymalna dopuszczalna ładowność w przypadku połączeń reprezentujących połączenia drogowe, maksymalna przepustowość w przypadku rurociągu itp.

Każda czynność może być wykonana na kilka alternatywnych sposobów, które między sobą różnią się wymaganiami zasobowymi oraz czasami wykonania. Dla czynności A_i zbiór możliwych sposobów wykonywania tej czynności oznaczamy przez M_i. Sposób, jakim wykonywana jest czynność A_i oznaczany jest przez $m_i \in \mathrm{M}_i$. Jeśli czynność A_i wykonywana jest sposobem m_i, to czas wykonywania tej czynności wynosi d_{im}, jego żądania zasobowe wynoszą r_{imk}^{μ} względem k-tego zasobu odnawialnego R_k^{μ}, $k = 1,2, \dots$, r_{imk}^{η} względem k-tego zasobu nieodnawialnego R_k^{η}, $k = 1,2, \dots$, oraz r_{imk}^{ν} względem k-tego zasobu przetwarzanego R_k^{ν}, $k = 1,2, \dots$. Zakładamy, że każda czynność A_i może być wykonana jednym i tylko jednym sposobem m_i w jednej i tylko jednej lokalizacji X_χ. Innymi słowy czynność nie może w trakcie wykonywania zmienić sposobu jakim jest wykonywania. Ponadto, nie może być w tym samym czasie wykonywana przy użyciu zasobów pochodzących z różnych lokalizacji, ani też nie może w trakcie wykonywania zmienić lokalizacji, w której rozpoczęto wykonywanie tej czynności, nawet wtedy gdy dostępne staną się zasoby, na których ta czynność mogłaby wykonać się krócej.

Ponadto, rozważany jest jeszcze jeden typ operacji, związany wyłącznie z zasobami przetwarzanymi, a ściślej rzecz ujmując z transferem zasobów przetwarzanych pomiędzy różnymi lokalizacjami. Operację taką nazywamy przesyłem i jest ona oznaczana jako para (A_i, A_j). Zapis ten oznacza, że przesył następuje pomiędzy lokalizacjami X_i and X_j, w których wykonywane są odpowiednio czynności A_i oraz A_j. Zakładamy, że każde ograniczenie kolejnościowe projektu spowodowane jest odpowiednim przesyłem. Oczywiście, możliwe jest także inne pochodzenie ograniczeń kolejnościowych, co również może być z łatwością zaadaptowane w tym modelu. W konsekwencji powyższego założenia nie ma potrzeby rozważania osobnego zbioru czynności projektu, ponieważ w takim przypadku przesyły mogą być reprezentowane przez odpowiednie łuki sieci czynności reprezentującej dany projekt.

Każdy przesył (A_i, A_j) charakteryzują trzy parametry: wielkość przesyłu F_{ij}, zbiór B_{ij} wymagań przesyłu, oraz zbiór R_{kij}^{ν} jednostek k-tego zasobu przetwarzanego, które należy przesłać pomiędzy lokalizacjami X_i oraz X_j. Zbiór B_{ij} jest stosowany by określić, czy dana l-ta ścieżka $P_l(X_i, X_j)$ pomiędzy lokalizacjami X_i oraz X_j może bądź nie może być użyta do przesyłu (A_i, A_j) pomiędzy tymi lokalizacjami. Wielkość przesyłu F_{ij} łącznie z wagami $\omega_{\psi}^{\mu\nu}$ dla wszystkich połączeń $(\mu,\nu)_{\psi}$ tworzących w grafie Γ ścieżkę $P_l(X_i, X_j)$ wyznaczają czas przesyłu τ_l^{ij}, czyli czas, jaki zajmie przesył odpowiednich zasobów po ścieżce $P_l(X_i, X_j)$. Zauważmy, że w przypadku gdy obydwie czynności A_i oraz A_j są wykonywane w tej samej lokalizacji X_{χ} czas przesyłu jest równy 0.

Celem jest taki przydział zasobów do czynności oraz połączeń sieci transportowej do przesyłów i uszeregowanie tych operacji w taki sposób, aby minimalny był czas wykonania całego projektu, uwzględniający zarówno czasy wykonania poszczególnych czynności, jak i czasy przesyłów

3. Algorytmy

Rozważany problem rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności oraz z siecią transportową jest silnie NP-trudnym problemem optymalizacyjnym, co wynika z faktu, że jest on uogólnieniem klasycznego problemu rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności. Ponadto, dla problemu rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności w obecności co najmniej dwóch typów zasobów nieodnawialnych już samo znalezienie jakiegokolwiek rozwiązania dopuszczalnego jest NP-zupełnym problemem decyzyjnym [12]. Oczywiście, tak samo jest w wersji tego problemu z siecią transportową. Znalezienie rozwiązania dopuszczalnego w tym przypadku wydaje się być jeszcze bardziej skomplikowane. W dalszej części tego punktu przedstawimy pewne definicje, które następnie znajdą zastosowanie w konstrukcji algorytmów służących do wyznaczania dopuszczalnych przydziałów zasobów w rozważanym problemie. Przedstawione tu dwa algorytmy są adaptacją algorytmów RA-TT i RA-W zaproponowanych w [16] do przydzielania zasobów obliczeniowych i sieciowych środowiska gridowego dla zadań typu workflow. Pierwszy z tych algorytmów o nazwie RA-TT został zaprojektowany do znajdowania dopuszczalnych przydziałów zasobów do czynności oraz połączeń sieci transportowej do przesyłów dla dwóch kolejnych czynności połączonych ograniczeniem kolejnościowym. Drugi algorytm służy do znalezienia dopuszczalnego przydziału zasobów dla całego projektu.

Zacznijmy od definicji dopuszczalnego przydziału zasobów. Przydział zasobów jest dopuszczalny o ile spełnia dwa następujące warunki:

(i) Każda czynność A_i jest przydzielona do węzła X_{χ} będącego w stanie wykonać tę czynność, to jest $r_{imk}^{\mu} \le P_{k\chi}^{\mu}$ dla $k = 1, 2, \ldots$, jeśli czynność A_i jest wykonywana sposobem m_i

(ii) Sumaryczne zapotrzebowanie wszystkich czynności projektu na k-ty zasób nieodnawialny R_k^{η}, $k = 1, 2, \ldots$, nie przekracza dostępności tego zasobu

(iii) Każdy przesył (A_i, A_j) jest realizowany po ścieżce $P_l(X_i, X_j)$ takiej, że wszystkie wymagania przesyłu (A_i, A_j) określone w zbiorze B_{ij} są spełnione przez każde połączenie $(\mu,\nu)_{\psi}$ należące do ścieżki $P_l(X_i, X_j)$.

W prosty sposób można sprawdzić warunek (i). Wystarczy porównać żądania zasobowe czynności A_i z ilościami zasobów dostępnymi w danej lokalizacji. Jeśli zrobimy to dla każdej lokalizacji zawierającej zasoby, to otrzymamy dla każdej czynności A_i zbiór $Y_i \subseteq X$ wszystkich węzłów zawierających zasoby zdolnych do wykonania czynności A_i. Każda czynność zostanie następnie przydzielona do dokładnie jednego węzła zasobowego ze zbioru Y_i. Jeśli dla dowolnej czynności A_i zachodzi warunek $Y_i = \emptyset$ wówczas nie istnieje żaden dopuszczalny przydział zasobów dla projektu P.

Warunek (ii) jest również stosunkowo łatwo weryfikowalny. Wystarczy sprawdzić podczas procesu przydzielania zasobów do czynności czy przypadkiem nie została przekroczona dostępność jakiegokolwiek zasobu nieodnawialnego.

Najbardziej skomplikowany jest proces sprawdzenia warunku (iii). Najpierw, należy wyznaczyć w grafie Γ podgraf $\Gamma_{ij} \subseteq \Gamma$ usuwając z grafu Γ wszystkie połączenia $(\mu,\nu)_\psi$ dla których zbiór ograniczeń $\Omega_\psi^{\mu\nu}$ zawiera warunki niezgodne z wymaganiami przesyłu (A_i, A_j) określonymi w zbiorze B_{ij}. Następnie w podgrafie Γ_{ij} wyznaczymy wszystkie składowe spójne $\Gamma_k^{ij} \subseteq \Gamma_{ij}$, $k = 1, 2, \ldots$. Taki podgraf Γ_k^{ij} będziemy w skrócie nazywać podsiecią. Przesył (A_i, A_j) może być przydzielony do dowolnej z takich podsieci, ponieważ połączenia tej podsieci spełniają wymagania przesyłu (A_i, A_j). Jednakże, nie oznacza to jeszcze, że będzie go można ten przesył wykonać w tej podsieci, ponieważ na tym etapie jeszcze nie wiadomo, czy węzły tej podsieci są w stanie wykonać obydwie czynności A_i oraz A_j. Niech $X_k^{ij} = X \cup N_k^{ij}$ będzie zbiorem węzłów zasobowych w podsieci Γ_k^{ij}, gdzie N_k^{ij} jest zbiorem węzłów w podsieci Γ_k^{ij}. Czynność A_i (lub A_j) może być wykonana w danej podsieci Γ_k^{ij} jeśli co najmniej jeden węzeł zasobowy w tej podsieci jest w stanie wykonać czynność A_i (lub A_j). Dokładniej to ujmując, aby dany przesył (A_i, A_j) mógł być wykonany w podsieci Γ_k^{ij} muszą być spełnione następujące dwa warunki:

(i) $X_k^{ij} \cap Y_i \neq \emptyset$

(ii) $X_k^{ij} \cap Y_j \neq \emptyset$.

W przeciwnym przypadku przesył (A_i, A_j) nie może być wykonany w podsieci Γ_k^{ij}. Zauważmy, że możliwe jest wykonanie obydwu czynności w tym samym węźle i w takim przypadku nie ma potrzeby rozważania przesyłu (A_i, A_j), ponieważ nie ma potrzeby przemieszczania zasobów przetwarzanych pomiędzy różnymi loakizacjami sieci transportowej.

Niech operacja $<A_i, A_j>$ oznacza trójkę $(A_i, (A_i, A_j), A_j)$, która składa się z dwóch czynności i przesyłu pomiędzy nimi. Operację taką nazywać będziemy operacją typu Czynność-Przesył-Czynność lub w skrócie ATA (od ang. Activity-Transfer-Activity). Dopuszczalny przydział zasobów dla ATA $<A_i, A_j>$ oznaczany jest przez RA_{ij} i definiowany jest jako taka para węzłów (X_i, X_j), że $X_i \in Y_i$ i $X_j \in Y_j$, oraz w danej podsieci Γ_k^{ij} istnieje ścieżka $P_l(X_i, X_j)$. Dla każdego k, dopuszczalny przydział zasobów RA_{ij} dla ATA $<A_i, A_j>$ można otrzymać przez:

(i) Przydział czynności A_i do dowolnego węzła ze zbioru $Z_i^k = Y_i \cap X_k^{ij}$

(ii) Przydział czynności A_j do dowolnego węzła ze zbioru $Z_j^k = Y_j \cap X_k^{ij}$.

Oczywiście jeśli, którykolwiek ze zbiorów Z_i^k lub Z_j^k nie zawiera żadnego węzła, czyli $Z_i^k = \varnothing$ lub $Z_j^k = \varnothing$, to wówczas ATA $<A_i, A_j>$ nie może być wykonana w podsieci Γ_k^{ij}. W skrajnym przypadku, może dojść do sytuacji, w której dla pewnej ATA $<A_i, A_j>$ nie istnieje podsieć, w której będzie można tę ATA wykonać. Oznacza to, że dla danego projektu nie istnieje dopuszczalny przydział zasobów. W rezultacie nie istnieje również rozwiązanie dopuszczalnej dla tej instancji problemu.

Następujący algorytm o złożoności obliczeniowej $O(\max\{|X|^3;(|N|+|\Psi|)\})$ został skonstruowany po to by dla ATA $<A_i, A_j>$ znaleźć zbiór A_{ij} zawierający wszystkie dopuszczalne przydziały zasobów RA_{ij}.

Algorytm RA-TT [16]:

1. $A_{ij} = \emptyset$.
2. Znajdź zbiory Y_i oraz Y_j. Jeśli $Y_i = \emptyset$ lub $Y_j = \emptyset$, wówczas dla danego projektu P nie istnieje żadne rozwiązanie dopuszczalne i STOP.
3. Wyznacz graf Γ_{ij}.
4. Znajdź wszystkie składowe spójne (podsieci) Γ_k^{ij} grafu Γ_{ij}.
5. Dla każdego k wyznacz zbiory Z_i^k oraz Z_j^k. Jeśli $Z_i^k = \varnothing$ lub $Z_j^k = \varnothing$, to ATA $<A_i, A_j>$ nie może być wykonana w podsieci Γ_k^{ij}.
6. Dla każdego k zastąp zbiór A_{ij} nowym zbiorem $A_{ij} := A_{ij} \cup Z_i^k \times Z_j^k$. Jeśli nowe $A_{ij} = \emptyset$, to wówczas nie istnieje żaden dopuszczalny przydział zasobów do projektu.

Dwie ATA $<A_i, A_j>$ oraz $<A_k, A_l>$ będziemy nazywać niezależnymi pod warunkiem, że $i \neq j \neq k \neq l$. W przeciwnym przypadku te dwia ATA nazywamy zależnymi, ponieważ co najmniej jedna czynność występuje w obydwu ATA. Dopuszczalny przydział zasobów RA_P dla projektu P jest zdefiniowany jako funkcja $w(A_i): V \to X$, gdzie $w(A_i) = \chi$ wtedy i tylko wtedy, gdy węzeł X_χ jest w stanie wykonać czynność A_i, a dla każdej pary $<A_i, A_j>$ i $<A_k, A_l>$ zależnych ATA spełnione są następujące warunki:

(1) $i = k \Rightarrow \exists X_\chi : (X_\chi, X_\theta) \in A_{ij} \wedge (X_\chi, X_\rho) \in A_{il}$

(2) $j = k \Rightarrow \exists X_\theta : (X_\chi, X_\theta) \in A_{ij} \wedge (X_\theta, X_\rho) \in A_{jl}$

(3) $i = l \Rightarrow \exists X_\rho : (X_\chi, X_\rho) \in A_{ij} \wedge (X_\theta, X_\rho) \in A_{kj}$.

Innymi słowy, funkcja $w(A_i)$ przypisuje każdą czynność do odpowiedniego węzła zasobowego w taki sposób, że nie występują konflikty pomiędzy zależnymi ATA.

Przejdźmy zatem do sposobu wyznaczenia dopuszczalnego przydziału zasobów RA_P dla danego projektu P. Zdefiniujmy dla każdej ATA $<A_i, A_j>$ dwa zbiory: $A_L^{ij} = \{X_l : \exists(X_l, X_r) \in A_{ij}\}$ oraz $A_R^{ij} = \{X_r : \exists(X_l, X_r) \in A_{ij}\}$. Zbiór A_L^{ij} jest zbiorem węzłów zasobowych występujących jako lewe składowe par RA_{ij} należących do zbioru A_{ij}. Natomiast zbiór A_R^{ij} definiowany jest prawie tak samo, lecz dotyczy prawych składowych par RA_{ij} należących do zbioru A_{ij}. Dla każdej czynności A_j wyznaczamy zbiór $A^j = \prod_i A_R^{ij} \cap \prod_j A_L^{jk}$, który jest zbiorem wszystkich węzłów zasobowych, w których może być wykonana czynność A_j, ponieważ spełniają one zarówno wymagania zasobowe samej czynności, jak i wymagania dotyczące przesyłu dla wszystkich ATA, w których czynność A_j występuje albo jako prawa, albo jaka lewa składowa.

Kolejnym etapem jest wyznaczenie dla każdej ATA $<A_i, A_j>$ zbioru $\mathrm{A}_P^{ij} = \mathrm{A}_{ij} \cap \left(\mathrm{A}^i \times \mathrm{A}^j\right)$ zawierającego wszystkie przydziały zasobów $RA_P^{ij} = \left(X_\chi, X_\rho\right)$ spełniające warunki (1), (2) i (3) dla całego projektu P. Jeśli żaden z tych zbiorów nie jest zbiorem pustym to musi istnieć co najmniej jeden dopuszczalny przydział zasobów RA_P dla całego projektu P. W przeciwnym przypadku (jeśli co najmniej jeden z tych zbiorów jest pusty), to nie istnieje żaden dopuszczalny przydział zasobów RA_P.

Oczywiście możliwe jest, że zbiór A_P^{ij} będzie zawierał więcej niż jeden element, czyli $\left|\mathrm{A}_P^{ij}\right| > 1$. W takim przypadku pojawi się problem wyboru ze zbioru A_P^{ij} tylko jednego $RA_P^{ij} \in \mathrm{A}_P^{ij}$ dla każdej ATA $<A_i, A_j>$. Problem ten można rozwiązać znajdując dopuszczalny przydział zasobów RA_P zdefiniowany przez funkcję $w(A_i)$, która spełnia następujące warunki:

(4) $\forall A_j \in \mathrm{V}\ \exists \theta \in \{1,\ldots,|\mathrm{X}|\}\ w(A_j) = \theta$

(5) $\left(X_\chi, X_\theta\right) \in \mathrm{A}_P^{ij} \Rightarrow w(A_i) = \chi$

(6) $\left(X_\theta, X_\rho\right) \in \mathrm{A}_P^{jk} \Rightarrow w(A_k) = \rho$.

Innymi słowy, dla danego wierzchołka $A_j \in \mathrm{V}$ sieci czynności G, reprezentującego czynność A_j projektu P, należy wykonać następujące działania. Łuki wchodzące (ATA) należy pokryć parami (reprezentującymi dopuszczalne przydziały zasobów) w taki sposób, że prawy element pary jest równy θ. Podobnie postępujemy w przypadku łuków wychodzących, ale wówczas lewy element tej pary musi być równy θ. Wartość θ nie musi być unikalna, tj. więcej niż jeden wierzchołek może mieć przypisaną tę samą wartość. Szukając dopuszczalnego przydziału zasobów dla całego projektu można potraktować pary $RA_P^{ij} = \left(X_\chi, X_\theta\right)$ ze zbioru A_P^{ij} jak kostki domina z liczbą oczek równą χ z jednej strony i θ z drugiej strony. Wówczas wystarczy pokryć wszystkie łuki sieci czynności G odpowiednimi dla danego łuku kostkami domina według reguł tej gry. Oznacza to, że wszystkie kostki domina spotykające się w tym samym wierzchołku grafu G muszą mieć taką samą liczbę oczek. Należy przy tym pamiętać, że ważna jest orientacja takiej kostki i nie można takiej kostki odwracać.

Następujący algorytm o złożoności obliczeniowej $O(|\mathrm{V}|^2 \cdot \max\{|\mathrm{X}|4;\ (|\mathrm{N}|+|\Psi|)\})$ znajduje dopuszczalny przydział zasobów RA_P dla projektu P.

<u>Algorytm RA-W</u> [16]:

1. Dla każdego ATA $<A_i, A_j>$ wykonaj algorytm RA-TT aby wyznaczyć zbiory A_{ij}.
2. Dla każdego ATA $<A_i, A_j>$ wyznacz zbiory A_L^{ij} oraz A_R^{ij}.
3. Dla każdej czynności A_j wyznacz zbiór A^j.
4. Dla każdego ATA $<A_i, A_j>$ wyznacz zbiory A_P^{ij}. Jeśli co najmniej jeden zbiór A_P^{ij} nie zawiera żadnego elementu tj. $\mathrm{A}_P^{ij} = \varnothing$, to nie istnieje żaden dopuszczalny przydział zasobów RA_P dla całego projektu P.

5. Znajdź funkcję $w(A_i)$ spełniającą warunki (4)-(6) i sprawdź czy nie zostały naruszone ograniczenia dotyczące zasobów nieodnawialnych.

Po wykonaniu algorytmu RA-W, znajdowany jest dopuszczaly przydział zasobów RA_P dla całego rozważanego projektu P. Przydział ten określony jest funkcją w w piątym punkcie algorytmu. W [16] wykazano, że algorytm RA-W zawsze znajduje rozwiązanie dopuszczalne RA_P dla projektu P, bez względu na to, które ATA będzie rozważane jako pierwsze, o ile taki przydział w ogóle istnieje oraz ograniczenia zasobowe względem zasobów nieodnawialnych są spełnione.

Na zakończenie przedstawimy prosty algorytm losowy, który pozwoli wyznaczyć dopuszczalny przydział zasobów dla całego projektu, o ile takowy przydział w ogóle istnieje. Algorytm ten generuje losowo funkcję $w(A_i)$. Zatem najpierw należy wykonać kroki 1-4 algorytmu RA-W, a następnie przejść do wykonywania tego algorytmu.

<u>Algorytm losowy</u> :

1. SA := $\emptyset$.
2. Ze zbioru $\mathrm{A}_P^{1,2}$ wyznaczonego dla ATA <A_1, A_2> wybierz losowo przydział zasobów $RA_P^{1,2} = \left(X_\chi, X_\theta\right)$.
3. $w\left(A_1\right) := \chi$ oraz $w\left(A_2\right) := \theta$; SA := {1, 2}; i := 1.
4. Jeśli $i < n$ to ES_i := {j: $A_j \in \mathrm{Succ}(A_i) \wedge j \notin \mathrm{SA}$}. W przeciwnym przypadku przejdź do punktu 9.
5. Jeśli $\mathrm{ES}_i = \emptyset$ to $i := i + 1$ i wróć do punktu 4.
6. $j := \min\limits_{j \in ES_i}\{j\}$.
7. Ze zbioru A_P^{ij} wyznaczonego dla ATA <A_i, A_j> wybierz losowo przydział zasobów $RA_P^{ij} = \left(X_\chi, X_\theta\right)$ taki, że $w\left(A_i\right) := \chi$.
8. $w\left(A_j\right) := \theta$; $\mathrm{SA} := \mathrm{SA} \cup \{j\}$; $\mathrm{ES}_i := \mathrm{ES}_i \setminus \{j\}$; Wróć do punktu 5.
9. Sprawdź, czy spełnione są ograniczenia dotyczące zasobów nieodnawialnych. Jeśli nie to wróć do punktu 1, w przeciwnym przypadku STOP,

Na początku algorytmu zbiór SA zawierający indeksy czynności, dla których ustalono już wartość funkcji $w(A_j)$ jest zbiorem pustym. W pierwszej kolejności losowo wybierany jest przydział zasobów dla ATA <A_1, A_2> . Zauważmy, że jeśli wierzchołki grafu G są zaetykietowane w porządku topologicznym, to w każdym takim grafie zawsze wierzchołek A_1 będzie wierzchołkiem początkowym i zawsze wystąpi łuk pomiędzy wierzchołkami A_1 i A_2. W trzecim kroku następuje przypisanie wartości dla $w(A_1)$ i $w(A_2)$ zgodnie z wybranym wcześniej przydziałem zasobów oraz zapamiętanie informacji o tym, że wierzchołkom A_1 i A_2 przypisano już wartości funkcji $w(A_j)$. W kolejnym kroku najpierw sprawdzamy, czy nie dotarliśmy już do ostatniego wierzchołka w grafie G. Jeśli tak, to następuje sprawdzenie czy spełnione są ograniczenia dotyczące zasobów odnawialnych. Jeśli tak to algorytm kończy działanie, w przeciwnym przypadku musi się on wykonać jeszcze raz od początku. Natomiast, jeśli nie dotarliśmy jeszcze do ostatniego wierzchołka, to dla bieżącego wierzchołka A_i wyznaczamy zbiór ES_i indeksów tych wierzchołków, które należą do zbioru bezpośrednich następników wierzchołka A_i a nie przypisano im jeszcze wartości funkcji w. Jeżeli zbiór ES_i nie jest pusty, to wybieramy z niego najmniejszą wartość j, a następnie ze zbioru A_P^{ij} usuwamy wszystkie przydziały, dla których lewa strona jest różna od $X_{w(A_i)}$. Z pozostałych przydziałów wybieramy losowo jeden z nich i na tej podstawie ustalamy wartość funkcji $w(A_j)$ i zapamiętujemy, że wierzchołkowi A_j przypisano wartość funkcji w. Operacje to powtarzamy dla pozostałych elementów zbioru ES_i, a następnie przechodzimy do następnego wierzchołka grafu G.

4. Podsumowanie

W artykule rozważany jest problem rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności, w którym dodatkowo rozważa się tak zwane zasoby przetwarzane oraz sieć transportową, a zasoby odnawialne są rozproszone pomiędzy wiele węzłów sieci transportowej odpowiadających lokalizacjom o różnych położeniach geograficznych. Problem ten stanowi nowe i bardzo istotne z praktycznego punktu widzenia rozszerzenie klasycznego problemu rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności. Ma on bardzo szerokie zastosowanie, szczególnie tam, gdzie mamy do czynienia ze zbiorem wielu zależnych operacji, które w dużej mierze polegają na przetwarzaniu odpowiednich zasobów. Takim przetwarzanym zasobem może być dowolny surowiec (ropa naftowa, węgiel, woda itp.), półprodukt, ale nie tylko. Mogą to być między innymi pliki komputerowe zawierające zbiór danych podlegający przetwarzaniu, a nawet ekspert, którego wiedza niezbędna jest do wykonania wielu czynności w różnych lokalizacjach, ale on sam może również brać udział w szkoleniach i prezentacjach odbywających się w innych lokalizacjach. Do przetwarzania tych zasobów używane są inne zasoby mieszczące się w różnych lokalizacjach. Lokalizacje te są połączone siecią transportową. Może to być sieć energetyczna, teleinformatyczna, sieć dróg, rozbudowany rurociąg itp. Problemem jest znalezienie dopuszczalnego przydziału zasobów do poszczególnych operacji (czynności i przesyłów). W tym celu opracowano model matematyczny problemu. Model jest na tyle ogólny i elastyczny, że bez większego wysiłku można wprowadzić do niego wiele zmian odzwierciedlających warunki rzeczywiste. Sam problem należy do klasy trudnych problemów decyzyjnych. Zaproponowano więc podejście, które pozwala na wygenerowanie jednego, a nawet wszystkich dopuszczalnych przydziałów zasobów do operacji projektu. Skonstruowano dwa algorytmy RA-TT oraz RA-W służące odpowiednio do znajdowania dopuszczalnych przydziałów zasobów do czynności oraz połączeń sieci transportowej do przesyłów dla dwóch kolejnych czynności połączonych ograniczeniem kolejnościowym (algorytm RA-TT) oraz do znajdowania dopuszczalnego przydziału zasobów dla całego projektu (algorytm RA-W). Przedstawiono też algorytm, który w sposób losowy generuje przydział zasobów dla całego projektu w oparciu o wyniki działania algorytmu RA-TT.

W przyszłości planowany jest dalszy rozwój tego modelu tak aby, uwzględniając inne warunki rzeczywiste, jak najlepiej opisywał problemy podobnej natury spotykane w praktyce. Ponadto planowane jest opracowanie algorytmów szeregowania, które pozwolą na znalezienie takich przydziałów, które optymalizują pewne kryterium np. czas wykonania całego projektu, koszt wykonania projektu itp. Otrzymane w ten sposób wyniki będzie można pod względem efektywności przetestować w środowisku rzeczywistym lub symulacyjnym.

Bibliografia

[1] Artigues, C. The resource-constrained project scheduling problem. In: Artigues, C., Demassey, S., Néron, E. (Eds.), Resource-Constrained Project Scheduling: Models, algorithms, extensions and applications. 21-35, London: ISTE-Wiley, 2008.

[2] Brucker, P., Drexl, A., Möhring, R., Neumann, K., Pesch, E. Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models and methods. *European Journal of Operational Research*, 1999, 112 (1) 3-41.

[3] Demeulemeester, E.L., Herroelen, W.S. Project Scheduling – A Research Handbook. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[4] Elmaghraby, S.E. Activity nets: a guided tour through some recent developments. *European Journal of Operational Research*, 1995, 82(3) 383-408.

[5] Hartmann, S., Briskorn, D. A survey of variants and extensions of the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research* , 2010, doi:10.1016/j.ejor.2009.11.005.

[6] Hartmann, S., Drexl, A. Project scheduling with multiple modes: A comparison of exact algorithms. *Networks*, 1998, 32 (4) 283-297.

[7] Hartmann, S., Kolisch R. Experimental evaluation of state-of-the-art heuristics for the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 2000, 127 (2) 394-407.

[8] Herroelen, W.S., De Reyck, B., Demeulemeester, E.L. Resource-constrained project scheduling: A survey of recent developments. *Computers & Operations Research*, 1998, 25 (4) 279-302.

[9] Herroelen, W.S., Leus, R. Project scheduling under uncertainty, survey and research potentials. *European Journal of Operational Research*, 2005, 65 (2) 289-306.

[10] Herroelen, W.S., Van Dommelen, P., Demeulemeester, E.L. Project network models with discounted cash flows: A guided tour through recent developments. *European Journal of Operational Research*, 1997, 100 (1) 97-121.

[11] Icmeli, O., Erengüç, S.S. The resource constrained time/cost tradeoff project scheduling problem with discounted cash flows. *Journal of Operations Management*, 1996, 14 (3) 255-275.

[12] Kolisch, R. Project scheduling under resource constraints: Efficient heuristics for several problem classes. Heidelberg: Physica, 1995.

[13] Kolisch, R., Hartmann, S. Heuristic algorithms for the resource-constrained project scheduling problem: Classification and computational analysis. In: Węglarz J (Ed), Project scheduling: Recent models, algorithms, and applications. 1999, Boston: Kluwer Academic Publishers, 147-178.

[14] Kolisch, R., Hartmann, S. Experimental investigation of heuristics for resource-constrained project scheduling: An update. *European Journal of Operational Research*, 2006, 174 (1) 23-37.

[15] Kolisch, R., Padman, R. An integrated survey of deterministic project scheduling. *OMEGA The International Journal of Management Science*, 2001, 29 (3) 249-272.

[16] Mika, M., Waligóra, G., Węglarz, J. Modelling and solving grid resource allocation problem with network resources for workflow applications. *Journal of Scheduling*, 2010, doi: 10.1007/s10951-009-0158-0.

[17] Neumann, K., Schwindt, Ch., Zimmermann, J. Project scheduling with time windows and scarce resources: Temporal and resource-constrained project scheduling with regular and nonregular objective functions. Berlin: Springer, 2002.

[18] Neumann, K., Schwindt Ch., Zimmermann J. Resource-constrained project scheduling with time windows. In: Perspectives in Modern Project Scheduling, J. Józefowska, J. Węglarz (Eds.), 375-407, Berlin: Springer, 2006.

[19] Özdamar, L., Ulusoy, G. A survey on the resource-constrained project scheduling problem. *IIE Transactions*, 1995, 27 (5) 574-586.

[20] Węglarz, J., Józefowska, J., Mika, M., Waligóra, G. Project scheduling with finite or infinite number of activity processing modes – a survey. *European Journal of Operational Research*, 2010, to appear.