Rafał RÓŻYCKI, Agnieszka ŁAWRYNOWICZ, Magdalena SROCZAN

Instytut Informatyki
Politechnika Poznańska

PROBLEM ALOKACJI WODY DO PROCESÓW O DYNAMICZNEJ CHARAKTERYSTYCE WYKONANIA

PROBLEM OF WATER ALLOCATION TO PROCESSES WITH DYNAMIC CHARACTERISTICS OF EXECUTION

In the paper various formulations of A problem of water allocation to some processes are considered. A process reQuires for its execution an amount of water and its prcessing time depends on the allotted amount of this resource. Water is assumed to be doubly-constrained resource, thus the temporal available amount as well as total available amount of water are known and limited. In the paper a dynamic model of job execution it utilized. IN the model relation between the processing rate and Temporal water Amount is expressed by the increasing, positive function. The model is general enough to cover the practical situations where allocation of water to a process may change during its execution. As a scheduling criterion we assume the schedule length. We propose some effective methods of finding the optimal or suboptimal solutions of the considered problem.

W pracy rozważa się różne sformułowania problemów alokacji zasobu do pewnej znanej liczby procesów, których wspólną cechą jest to, że szybkość ich realizacji zależna jest od wielkości przydzielonego im strumienia wody. Przez strumień wody rozumie się tę część dostępnej maksymalnej jej podaży, która jest przydzielona do konkretnego procesu. W najogólniejszym sformułowaniu wodę traktuje się jako zasób podwójnie ograniczony. Oznacza to, że ograniczona jest zarówno całkowita podaż wody, jak i jej całkowity zapas. Dynamika procesu opisana jest za pomocą funkcji ciągłej niemalejącej, której argumentem jest chwilowy strumień wody a wartością szybkość procesu. Każdy proces charakteryzowany jest przez parametr, który interpretowany jest jako jego rozmiar. Zakłada się, że procesy są niezależne i niepodzielne.

W pracy za kryterium szeregowania przyjmuje się długość uszeregowania co znajduje swoje uzasadnienie praktyczne w sytuacji gdy dysponując ograniczonymi zasobami wody wymagamy by zbiór procesów wykonany był w jak najkrótszym czasie.

Dla każdego wariantu problemu szeregowania analizowane są własności uszeregowań optymalnych, podawana jest ogólna metodyka rozwiązywania problemu oraz wskazane są przypadki rozwiązywalne w sposób analityczny.

Praca ma dwojaki charakter. Po pierwsze stanowi zestawienie niektórych, znanych już wcześniej, technik wyznaczania optymalnych przydziałów strumieni wody do procesów. Z drugiej strony zawiera też pewne wyniki oryginalne, wcześniej nie publikowane.

1. Wprowadzenie

Obserwowany w ostatnich latach wzrost ogólnoświatowej świadomości postępującego procesu wyczerpywania zasobów naturalnych, powoduje swoistą presję na środowisko inżynierów i naukowców, domagając się od niego wypracowania technologii, narzędzi, metod oszczędnego gospodarowania tymi zasobami. Racjonalne gospodarowanie wodą - zasobem naturalnym o szczególnym znaczeniu praktycznym, jest tematem wielu opracowań naukowych.

W niniejszej pracy podjęta jest próba wskazania efektywnych metod wykorzystywania wody w pewnych procesach technologicznych, których wspólną cechą jest to, że szybkość ich realizacji zależna jest od przydzielonej im chwilowej ilości tego zasobu (strumienia wody). Zakładać będziemy przy tym, że parametry takiego procesu są znane a dodatkowo, na zbiór takich procesów, nałożone jest pewne kryterium czasowe.

Zagadnienia z tego zakresu zaliczane mogą być do deterministycznej teorii szeregowania zadań, dlatego część terminologii oraz narzędzi na użytek tego opracowania zapożyczonych jest z tej właśnie dziedziny nauki.

Na wodę jako zasób ograniczony, niezbędny do wykonania procesu, można spojrzeć na trzy sposoby. Po pierwsze można uznać, że znany jest jej całkowity zapas, który w trakcie realizacji procesu jest wyczerpywany. Jeśli nie nakłada się przy tym żadnego ograniczenia na wielkość strumienia wody dostarczanego do procesu, woda ma charakter zasobu nieodnawialnego.

Woda może być traktowana jako zasób nieodnawialny jedynie w wyjątkowych sytuacjach. Najczęściej bowiem, również podaż wody (maksymalna chwilowa ilość dostarczanej wody) jest ograniczona (np. przepustowością rur, mocą pompy), w takiej sytuacji woda staje się zasobem podwójnie ograniczonym.

Trzeci przypadek zachodzi, gdy całkowity zapas wody może być traktowany jako nieograniczony, a ograniczona jest jedynie jej podaż. W tym przypadku woda traktowana jest jak zasób odnawialny.

Praktycznie uzasadnione są dwa ostatnie przypadki, gdyż sytuacja gdzie dopuszczalna jest dowolnie duża chwilowa podaż wody jest nierealna.
Na gruncie powyższego podziału, sformułowania problemów optymalizacji można różnicować także ze względu na kryterium optymalizacji. Rozważyć można tu dwa warianty problemów. W pierwszym wariancie minimalizowane może być jedno (lub w ogólności wiele) z kryteriów czasowych przy czym ograniczona dostępna ilość i/lub chwilowa podaż wody jest znana i stała. Drugi wariant problemu zakłada istnienie ustalonej wartości kryterium czasowego, celem jest natomiast takie uszeregowanie procesów, które zminimalizuje całkowite zużycie lub wielkość niezbędnej chwilowej podaży wody.

W ogólności problemy tego typu zalicza się do kategorii dyskretno-ciągłych problemów szeregowania. W niniejszym opracowaniu przyjęto jednak uproszczenie polegające na tym, że albo brak jest dodatkowych zasobów dyskretnych niezbędnych do wykonania procesów (czyli dowolna liczba procesów może być wykonywana równolegle), albo zakłada się, że procesy muszą być wykonane sekwencyjnie – co można modelować jako problem szeregowania procesów na pojedynczej maszynie.

Bardzo istotny wydaje się w kontekście rozważanych problemów, sposób prezentowania zależności między szybkością wykonywania procesów a ilością przydzielonej im wody. W najprostszym modelu zakłada się bowiem, że od chwilowego strumienia wody zależy czas wykonania procesu. W modelu takim zakłada się jednak explicite, że niemożliwa jest zmiana przydzielonego strumienia wody do procesu. Dużo bardziej interesujący jest model zwany dynamicznym, w którym procesy charakteryzowane są przez rozmiar oraz funkcję, która chwilową szybkość przetwarzania procesu uzależnia od przydzielonego mu w tym momencie strumienia wody. Funkcja ta, nazywana dalej dla uproszczenia funkcją szybkości, jest nieujemna, rosnąca i najczęściej wklęsła. Najczęściej zakłada się przy tym, że wszystkie procesy charakteryzuje identyczny model wodochłonności (identyczna funkcja szybkości), procesy różnią się jedynie rozmiarem, oraz ewentualnie takimi parametrami jak moment gotowości czy pożądany termin zakończenia.

W niniejszej pracy zakłada się, że różne procesy mogą być charakteryzowane poprzez różne funkcje szybkości, co przy ogromnym spektrum problemów, które mogą być w taki sposób modelowane jest podejściem jak najbardziej uzasadnionym.

2. Sformułowanie problemu

Zanim sformułujemy rozważane problemy rozpoczniemy od przedstawienia modelu matematycznego procesu. Załóżmy, że dany proces i ma znany rozmiar w_i, i aby mógł być zrealizowany musi mieć przydzieloną pewną niezerową ilość wody, przy czym na chwilową szybkość realizacji tego procesu wpływa przydzielony do niego chwilowy strumień wody $p_i(t)$. Zależność tę wyraża się za pomocą funkcji szybkości wykonania procesu $s_i(\cdot)$, która może być inna (unikalna) dla każdego procesu:

$$\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = s_i(p_i(t)), \;\; x_i(0) = 0, \;\; x_i(C_i) = w_i \qquad (1)$$

gdzie

· $x_i(t)$ – stan procesu i w chwili t,

· $s_i(\cdot)$ – rosnąca (dodatnia), ciągła funkcja szybkości wykonania procesu i, $s_i(0)=0$,

· $p_i(t)$ – strumień wody przydzielony do procesu i w chwili t,

· w_i – rozmiar procesu i ,

· C_i – moment zakończenia (nieznany a priori) procesu i.

Niech będzie dany zbiór n procesów niepodzielnych, które można rozpocząć w tym samym momencie (o ile nie założymy inaczej) i dla których znane są rozmiar oraz funkcja szybkości wykonania procesu. Do wykonania procesów niezbędna jest woda, która jest zasobem ograniczonym.

W zależności od sposobu traktowania wody jako ograniczonego zasobu zakładać będziemy dodatkowo:

a) dla problemu gdzie woda jest zasobem odnawialnym

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \le P \qquad (2)$$

gdzie P jest znaną maksymalną podażą wody (P jest stałe w czasie),

b) dla problemu gdzie woda jest zasobem podwójnie ograniczonym oprócz ograniczenia (2) obowiązuje również następujące naturalne ograniczenie:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{C_{\max}} p_i(t)dt \le E \qquad (3)$$

gdzie E jest znaną całkowitą dostępną ilością wody

Proces uważa się za zakończony w chwili C_i jeśli spełniony jest następujący warunek:

$$w_i = \int_{t_i^0}^{C_i} s_i(p_i(t))dt \qquad (4)$$

W problemach, w których ograniczeniami będą a) lub b) (odpowiednio, w problemach: C_{max}/P, C_{max}/PE) zakładać będziemy, że kryterium optymalizacji stanowić będzie czas wykonania całego zbioru procesów, C_{max}.

Możliwe jest również rozważanie problemów dualnych do powyższych. W problemach tych minimalizowana jest wartość E lub P przy zadanej ustalonej wartości długości uszeregowania C_d, są to więc kategorie problemów, w których przy ustalonej wartości czasu trwania realizacji wszystkich procesów minimalizuje się całkowitą podaż lub całkowite zużycie wody. Warto przy tej okazji zauważyć, że problem dualny do C_{max}/PE, miałby już charakter wielokryterialny (konkretnie dwukryterialny, ze względu na jednoczesną minimalizację P oraz E) i jako taki wykracza poza zakres tego opracowania.

Podsumowując, aby rozwiązać postawiony problem należy znaleźć taką funkcję wektorową $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})=[p_1(t), p_2(t),..., p_n(t)]$, $p_i(t)\geq 0$, $i=1,2,...,n,$ która minimalizuje długość uszeregowania dla problemu, C_{max}/P, $C_{max}/PE.$

Optymalne wartości $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$, C_{max} oznaczać będziemy odpowiednio: $\boldsymbol{p}^*(\boldsymbol{t})$, C_{max}^*.

Niektóre z powyższych problemów doczekały się opracowań naukowych, których podstawowe wyniki zostały zebrane w Rozdziałach 3 i 4. W Rozdziale 5 podana jest metoda rozwiązania szczególnej klasy rozważanych tu problemów. Rozdział 6 stanowi podsumowanie niniejszego opracowania.

3. Optymalny rozdział wody przy ograniczonej jej podaży

Zdefiniujmy zbiór U jako zbiór dopuszczalnych strumieni (rozdziałów dostępnej podaży wody do procesów), czyli wektorów $\mathbf{u} \in R^n$, spełniających następujące warunki:

$$U = \{\mathbf{p} : \sum_{i=1}^{n} p_i \le P \wedge p_i \ge 0, i = 1,2,..., n\}$$

Następnie zdefiniujmy zbiór V następująco:

$$\mathbf{v} \in V \Leftrightarrow \mathbf{u} \in U, \text{ gdzie } \mathbf{v} = \mathbf{s}(\mathbf{p}).$$

Do zbioru V należą więc punkty reprezentujące dopuszczalne ze względu na ograniczoną podaż wody wektory szybkości wykonania procesów.
Węglarz [5] dowiódł, że optymalny ze względu na długość uszeregowania (C_{max}) przydział zasobu ciągłego leży w punkcie przecięcia prostej o równaniach parametrycznych:

$$v_i = w_i / T \ , \quad i=1,2,\ldots,n$$

z brzegiem zbioru wszystkich kombinacji wypukłych elementów zbioru V (powłoką wypukłą zbioru V).
Postać zbioru V wpływa więc na sposób wyznaczania optymalnych alokacji zasobu. Oczywiście, postać ta jest różna dla różnych funkcji szybkości wykonywania procesów, przy pewnych założeniach można jednak sformułować pewne wnioski ogólne. Poniżej, za [1],[2],[4] zbierzemy je jako listę przydatnych dalej własności optymalnych alokacji zasobu ciągłego dla problemu C_{max}/P.

Własność 1

Jeśli procesy nie wymagają innych zasobów do wykonania prócz wody, w rozwiązaniu optymalnym każdy proces wykonywany jest przy użyciu stałego strumienia wody.

Własność 1 jest bardzo istotna ze względu na uzyskiwane dzięki niemu uproszczenie problemu. Na bazie ogólnego modelu (1) wykazać bowiem można, że dla rozważanego problemu nie warto rozważać zmiennego w czasie strumienia wody do procesu, gdyż rozwiązanie optymalne można uzyskać stosując stałe (choć dla każdego procesu być może inne) strumienie wody.

Własność 2

Dla wklęsłych funkcji szybkości wykonywania optymalne ze względu na C_{max} jest równoległe wykonywanie wszystkich procesów, przy czym

- minimalną wartość C^*_{max} wyznaczyć można jako jedyne dodatnie rozwiązanie równania:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}(w_i / C_{\max}) = P \tag{5}$$

- natomiast optymalny rozdział dostępnej podaży wody na strumienie dany jest wzorem:

(6)

$$p_i^*(t) = p_i^* = s_i^{-1}(w_i / C^*_{\max}), i = 1,\ldots,n, t \in < 0, C^*_{\max} >$$

Własność 3

Dla wypukłych funkcji szybkości wykonywania optymalne ze względu na minimalizację C_{max} jest szeregowe wykonywanie wszystkich procesów, przy czym:

- procesy używają do swego wykonania całej dostępnej podaży wody P,
- w uszeregowaniu optymalnym kolejność wykonania procesów jest dowolna,
- w uszeregowaniu optymalnym do zakończenia ostatniego procesu nie występują momenty, w których nie wykonywany jest żaden proces.

Własność 4

Jeżeli oprócz wody nie ma żadnych innych zasobów niezbędnych do wykonania procesów, podzielność procesu nie poprawia rozwiązania optymalnego otrzymanego dla procesów niepodzielnych.

4. Optymalny przydział wody przy ograniczonej jej ilości i podaży

W rozdziale tym zaprezentowany zostanie sposób wyznaczania rozwiązań optymalnych problemu C_{max}/EP, w którym woda traktowana jest jako zasób podwójnie ograniczony. Zakładać też będziemy, że funkcje szybkości wykonywania wszystkich procesów są wklęsłe. W [3] Rozycki i Weglarz na przykładzie problemu rozdziału mocy i energii, pokazali optymalny ze względu na C_{max} przydział zasobu podwójnie ograniczonego do procesów niezależnych. Na podstawie tych wyników sformułować można następujący wniosek dla rozważanego tu problemu.

Własność 5

Optymalna alokacja wody do procesów o wklęsłych funkcjach szybkości ma postać podaną w (6)

gdzie C_{max}^* jest dodatnim rozwiązaniem równania:

$$C_{\max}\sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}(w_i / C_{\max}) = E \tag{7}$$

jeśli

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}(w_i / C_{\max}) \le P \tag{8}$$

w przeciwnym wypadku C_{max}^* obliczane jest z (5) i (6).

W pierwszym przypadku aktywnym ograniczeniem jest ograniczenie na całkowity zapas wody, nie na jej podaż. Oznacza to, że **p** obliczone z (6) i (7) jest optymalnym przydziałem strumienia wody gdyż nie przekracza on dostępnej podaży P. Może się jednak zdarzyć, że to wielkość podaży jest krytyczna dla danej instancji problemu. Wtedy minimalną długość uszeregowania wyznaczyć można z (5).

5. Optymalna alokacja wody do procesów wykonywanych sekwencyjnie

W rozdziale tym zaprezentowana zostanie metoda rozwiązania szczególnego przypadku problemu rozważanego w poprzednich rozdziałach. Jak pokazano w Rozdziale 3, dla wklęsłych funkcji szybkości optymalne ze względu na oba rozważane kryterium optymalizacji jest równoległe wykonanie procesów. W rozdziale tym rozważymy sytuację gdy równoległe wykonywanie takich procesów jest niemożliwe. Na przykład, sytuacja taka może wystąpić gdy procesy muszą być wykonane przy użyciu jakiegoś urządzenia (czyli dodatkowego zasobu dostępnego w liczbie jednostek równej jeden).

Łatwo wykazać można, że pozostają dla takiego przypadku w mocy Własności 1 – 4. Dają one możliwość sformułowania odpowiednich problemów nieliniowego programowania matematycznego. Problem programowania nieliniowego dla problemu C_{max}/EP, w którym procesy muszą być wykonywane sekwencyjnie ma następującą postać:

Problem C_{max}/EP

$$(\min) \quad C_{max} = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{s_i(p_i)} \tag{9}$$

p.o.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i p_i}{s_i(p_i)} \le E \tag{10}$$

$$0 \le p_i \le P, \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{11}$$

W ogólności rozwiązanie nieliniowego problemu programowania matematycznego (9) – (11) dla dowolnych wklęsłych postaci funkcji $s_i(p_i)$, i=1, 2, ...,n wymaga zastosowania podejścia numerycznego. Wyróżnić można jednak dwie sytuacje szczególne, które pozwalają na znalezienie bardziej efektywnych technik znajdowania rozwiązania optymalnego.

5.1. Przypadek wystarczającego zapasu wody

Pierwsza sytuacja następuje wtedy, kiedy dla rozwiązania optymalnego ze względu na długość uszeregowania aktywne są wszystkie ograniczenia (11). Oznacza to, że optymalna jest alokacja wody do procesów, w której jedynym ograniczeniem jest podaż wody, zaś jej zapas całkowity E jest wystarczający wykonania zbioru procesów w minimalnym czasie C_{max}^*. Oczywiste jest, że optymalne w takim wypadku jest sekwencyjne wykonanie wszystkich procesów za pomocą strumienia wody równego jego podaży ($p_i = P$, i=1, 2, ..., n). Dla przypadku tego prawdziwa jest więc następująca własność.

Własność 6

Dla problemu, w którym procesy o wklęsłych funkcjach szybkości muszą być wykonane sekwencyjnie, jeśli spełniony jest warunek:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i P}{s_i(P)} \le E$$

wtedy optymalne jest wykonanie procesów przy użyciu strumienia wody równego całkowitej jej podaży

$$p_i^* = P, \ i=1, 2, \ldots, n$$

5.2. Przypadek wystarczającej podaży wody

Drugi interesujący przypadek szczególny występuje gdy jedynym ograniczeniem aktywnym w problemie (9) – (11) jest ograniczenie (10). Oznacza to, że w każdym momencie całkowita podaż wody P jest wystarczająca do wykonania zbioru procesów w czasie optymalnym C_{max}^*.
Załóżmy w związku z tym, że rozważany problem nieliniowego programowania matematycznego składa się jedynie z funkcji celu (9) i ograniczenia (10) sformułowanego jako równanie. W takim przypadku funkcja Lagrange'a dla problemu (9) - (10) ma postać:

$$L(p_i,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{s_i(p_i)}+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i p_i}{s_i(p_i)}-E\right)$$

Z warunków gradientowych:

$$\frac{\partial L(p_i,\lambda)}{\partial p_i}=\frac{-w_i(s_i(p_i)')}{(s_i(p_i))^2}+\lambda\frac{w_i s_i(p_i)-w_i p_i\cdot(s_i(p_i)')}{(s_i(p_i))^2}=0 \qquad ,i=1,2,...,n$$

wynika, że

$$\frac{\partial L(p_i,\lambda)}{\partial p_i}=-s_i(p_i)'+\lambda s_i(p_i)-\lambda p_i\cdot(s_i(p_i)')=0 \qquad , i=1,2,...,n$$

a więc

$$\lambda=\frac{s_i(p_i)'}{s_i(p_i)-p_i\cdot(s_i(p_i)')} \qquad , i=1,2,...,n \tag{12}$$

Z powyższego wynika, że aby rozwiązać szczególny przypadek problemu C_{max}/EP, w którym ograniczenia (11) są nieaktywne, należy znaleźć takie punkty Lagrange'a ($\mathbf{p}$, λ), które spełniają układ n+1 równań złożony z (10) i (12). W ogólności rozwiązanie takiego układu równań również może nie być proste. Wykażemy poniżej, że istnieją jednak ważne z praktycznego punktu widzenia przypadki, które prowadzą do rozwiązań analitycznych.

5.2.1. Przypadki rozwiązywalne analitycznie

W dalszej części rozważań użyteczna będzie następująca własność rozwiązań optymalnych [1].

Własność 7

Problem alokacji zasobu ciągłego do procesów o rozmiarach w_i i funkcjach szybkości wykonania postaci: $s_i(p_i):=c_i f_i(p_i)$ jest tożsamy z problemem, w którym procesy mają rozmiar $w_i{}'=w_i/c_i$ oraz a funkcje szybkości wykonania procesów $s_i'(p_i):=f_i(p_i)$

Rozważmy teraz bardzo ważny z praktycznego punktu widzenia przypadek funkcji szybkości przetwarzania postaci: $s_i(p_i) := c_i p_i^{1/\alpha_i}, c_i > 0$.

Na mocy Własności 8, bez utraty ogólności, dla poprawy czytelności nasze rozważania możemy zawęzić do funkcji postaci $s_i(p_i) := p_i^{1/\alpha_i}$.

Dla rozważanego tu przypadku funkcji $s_i(p_i) := p_i^{1/\alpha_i}$ i= 1,2,...,n, wzór (12) przyjmuje postać:

$$\lambda = \frac{1}{p_i(\alpha_i - 1)} \qquad ,i = 1, 2,...,n \tag{13}$$

Z (13) wynika, że dowolne p_i, i=2,3,...,n, można wyrazić jako

$$p_i = \frac{(\alpha_1 - 1)p_1}{(\alpha_i - 1)} \qquad ,i = 2, 3,...,n \tag{14}$$

co, po podstawieniu do równania (10) daje następujące równanie z jedną niewiadomą p_1

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \varphi_i p_1^{(\alpha_i - 1)/\alpha_i} = E \tag{15}$$

gdzie

$$\varphi_i = \left(\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_i - 1} \right)^{(\alpha_i - 1)/\alpha_i}$$

Równanie (15) może być rozwiązane analitycznie dla przypadków funkcji szybkości procesów, w których współczynniki α_i, osiągają przykładowo wartości ze zbioru: $\alpha_i \in \{6/5, 3/2, 2, 3\}$, i=1,2,...,n. Dla wymienionych wartości współczynników α_i, poprzez proste podstawienie otrzymać można bowiem równanie wielomianowe stopnia nie większego niż 4.

5.2.2. Zastosowanie algorytmu programowania dynamicznego

W sytuacji gdy układ równań (10) i (12) nie może być rozwiązany analitycznie, istnieje jeszcze inna możliwość. Jak łatwo zauważyć, problem nieliniowego programowania matematycznego (9)-(10) ma postać klasycznego jednowymiarowego procesu alokacji, w którym funkcja celu jest separowalna (jest sumą funkcji jednej zmiennej) a ponadto pomiędzy procesy rozdysponowywany jest cały dostępny zapas wody

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i p_i}{s_i(p_i)} = \sum_{i=1}^{n} E_i = E$$

gdzie E_i jest ilością wody przydzieloną do procesu i.

Przy założeniu pewnego poziomu dyskretyzacji L zapasu wody, problem taki może być rozwiązany metodą programowania dynamicznego. L oznacza przy tym pewną skończoną liczbę różnych dopuszczalnych przydziałów zapasu wody.
W kolejnym etapie i, $i = n, n$-1,...,2 wyznaczania rozwiązania metodą programowania dynamicznego konieczne jest wyznaczenie podaży wody p_i dla danego poziomu E_i ze wzoru:

$$\frac{w_i p_i}{s_i(p_i)} = E_i$$

– tak, by możliwe było obliczenie częściowej wartości funkcji celu. W ogólności może to być trudne ze względu na konieczność rozwiązania równania nieliniowego z jedną niewiadomą, którego złożoność zależy od postaci funkcji s_i. Na pewno jest to jednak łatwiejsze od rozwiązywania układów równań (10), (12).

5.3. Podejście heurystyczne do rozwiązania problemu z ograniczeniem na podaż i zapas wody

Na bazie propozycji podejść zaproponowanych w rozdziałach 5.1 i 5.2 możliwe jest zastosowanie wykorzystującego je podejścia heurystycznego. Będzie miało ono charakter iteracyjny. W iteracji pierwszej ustala się dane wejściowe oraz warunki początkowe dla algorytmu. W kolejnych iteracjach rozwiązywany jest problem bez warunku na ograniczenie podaży wody, czyli problem (9)-(10). W rozwiązaniu problemu (9)-(10) sprawdza się następnie czy występują w nim procesy, do których przydzielony ma być strumień wody większy od jej podaży. Jeśli procesy takie nie występują, to otrzymane wielkości strumieni przydzielonych do procesów są optymalne i algorytm kończy się. Natomiast, jeśli procesy takie (co najmniej jeden) występują, to dla procesów tych zakłada się strumień wody równy jej podaży i odpowiednio umniejsza się ilość dostępnej wody o ilość przez nie zużytą. Następnie dla pozostałych procesów problem (9)-(10) rozwiązywany jest ponownie, jednak dla umniejszonej w poprzednim kroku dostępnej ilości wody.

W sposób bardziej sformalizowany algorytm ten zapisać można następująco:

Algorytm 1

1) Niech dane są: zbiór A zawierający n procesów o zadanych parametrach, całkowita ilość wody E, jej podaż P oraz $C_{max} = 0$.
2) Znajdź wektor strumieni $\mathbf{p'}=[p_1', p_2',..., p_n']$, $p_i'\geq 0$, i=1,2,...,n, poprzez rozwiązanie problemu (9) - (10) dla danych A i E
3) Utwórz zbiór A' takich n' procesów, dla których obliczone p_i' : $p_i' > P$.
4) Jeśli A' == Ø, wtedy:

4a) $C_{\max} = C_{\max} + \sum_{i \in A} \frac{w_i}{s_i(\hat{p_i})}$ i zakończ postępowanie

w przeciwnym przypadku

4b) $C_{\max} = C_{\max} + \sum_{i \in A'} \frac{w_i}{s_i(P)}$; $E = E - \sum_{i \in A'} \frac{w_i P}{s_i(P)}$; A = A - A' i wróć do 2)

W powyższej heurystyce wątpliwość budzić może krok 4b), w którym zakłada się, że niektóre procesy wykonywane będą przy mniejszym strumieniu wody (a więc wolniej) niż wynikałoby to z rozwiązania problemu (9) – (10). Należałoby w takim razie sprawdzić, czy całkowita ilość zużytej przez taki proces wody się przez to nie zwiększa. W łatwy sposób wykazać jednak można następującą użyteczną tu własność:

Własność 8

Dla dowolnego procesu i o ściśle wklęsłej funkcji szybkości wykonywania spełniony jest warunek (gdzie T jest czasem jego wykonywania):

$$\lim_{T\to\infty} T s_i^{-1}(w_i/T) < E$$

dla dowolnego $E > 0$.

Dzięki Własności 8 przydział strumienia mniejszego niż wynikającego z rozwiązania (9) – (10) nie spowoduje przekroczenia dostępnego zapasu wody.

Jak łatwo zauważyć, kluczowy dla złożoności obliczeniowej proponowanej heurystyki jest krok 2) gdzie rozwiązywany jest problem (9) – (10). Oczywiście, na podstawie rozdziału 5.2.1 można stwierdzić, że czasami daje się zrealizować ten krok obliczając wektor **p'** analitycznie. W pozostałych przypadkach zdawać się musimy na podejście przybliżone o złożoności pseudowielomianowej (patrz punkt 5.2.2) lub na ogólnie znane metody numerycznego rozwiązywanie problemów nielinowego programowania matematycznego.

6. Podsumowanie

W pracy na bazie wcześniej znanych własności problemu pokazano sposób znajdowania rozwiązań optymalnych jego specjalnych przypadków. Dla instancji problemów o specyficznych, choć ważnych w praktyce funkcjach szybkości wykonania procesów, gdzie podaż wody nie stanowi istotnego ograniczenia, wykazano możliwość znajdowania rozwiązań w sposób analityczny. Zaproponowana heurystyka, stanowić może dobry szkielet efektywnej metody znajdowania rozwiązań przybliżonych przypadku ogólnego.

Rozważania zamieszczone w tej pracy stanowić mogą punkt wyjścia do rozwiązywania problemów, w których oprócz wody należy również uwzględnić inne zasoby różnych kategorii lub sytuacje, w których procesy są częściowo uporządkowane.

Podziękowanie

W pracy zaprezentowano wybrane wyniki badań z projektu współfinansowanego z grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr N N519 403437.

Bibliografia

[1] Józefowska J.: *Dyskretno-ciagłe problemy szeregowania zadań*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, seria Rozprawy Nr 318, Poznań 1997.

[2] Józefowska J., Węglarz J, 1998, “On a methodology for discrete-continuous scheduling problems”, European Journal of Operational Research, 107/2, pp. 338-353.

[3] Różycki R. Węglarz J.,2009, “On job models in power management problems”, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, Vol. 57, No 2, pp.147-151.

[4] J. Węglarz, “Project scheduling with continuously-divisible doubly constrained resources”, *Management Science*, 27/9, 1981, pp.:1040-1053.