

Wiktor TREICHEL¹, Czesław GRABARCZYK

¹ Wydział Inżynierii Środowiska
Politechnika Warszawska

OPTYMALIZACJA PARAMETRÓW PROCESU FILTROWANIA WODY

OPTIMIZATION OF WATER FILTRATION PROCESS PARAMETERS

In this paper mathematical model, numerical simulations and optimization of parameters of water filtration process are presented. A simulation program, developed in Matlab environment, is based on the mathematical description of water filtration using the macroscopic approach. Three partial differential equations involved in the model, different initial and boundary conditions and their technical interpretation are discussed in details. To find an optimal solution of the described problem a simulated annealing algorithm is used. It results in optimal values of filtration velocity, filter bed thickness and optimal size of the bed grains. A practical example of a contact filtration process optimization is presented and a special attention is paid to discuss the contribution of the developed method to the engineering design practice.

1. Wprowadzenie

Filtrowanie jest procesem mechanicznego rozdzielania mieszaniny ciecz-ciało stałe w przegrodzie porowatej, w której zatrzymywane są cząstki ciała stałego, a ciecz jest przepuszczana. W uzdatnianiu wody najczęściej stosowaną przegrodą są sypkie złoża ziarniste, budowane z kruszywa różnorodnych minerałów lub materiałów sztucznych. Filtrowanie wody w złożach porowatych jest procesem, w którym zawiesiny wychodzą ze strumienia i osadzają się na powierzchni ziaren. Ogólny opis procesu filtrowania zawiesin z uzdatnianej wody wymaga określenia: zmian stężenia zawiesin w wodzie, $C(x,t)$, oraz zmian koncentracji zawiesin kumulowanych w złożu, $\sigma(x,t)$, w funkcji głębokości przekrojów złoża i czasu oraz strat ciśnienia, $h(t)$, na skutek przepływu wody przez złożę, w funkcji czasu filtrowania. Oznacza to, że dla opisu procesu filtrowania wody w złożu konieczne jest zbudowanie układu trzech równań, które by umożliwiły wyznaczenie poszukiwanych funkcji C , σ oraz h . Taki układ może składać się z równania ciągłości (bilansu) i równania kinetyki (intensywności) procesu zatrzymywania zawiesin przez złożę oraz równania strat hydraulicznych powstających na stopniowo kolmatującym się złożu. Równania te są rozwiązywane dla zadanych wartości: stężenia początkowego C_0 zawiesin w strumieniu, prędkości filtracji w_f , średnic d ziaren złoża, początkowej porowatości ε_0 oraz własności fizycznych wody, zawiesin i ziaren. Czas pracy filtra, w jednym cyklu filtracyjnym,

określany jest przez dwa kryteria: (1) przekroczenie dopuszczalnej koncentracji zawiesin w filtracji, tzn. w wodzie na wypływie z filtra oraz (2) przekroczenie dopuszczalnej wartości oporów hydraulicznych przepływu wody przez złożę. Wg pierwszego kryterium otrzymujemy okres bezpiecznego filtrowania, t_c , natomiast wg drugiego kryterium – okres t_h . Istotnym warunkiem optymalnej pracy filtra jest żądanie, aby $t_c = t_h$. Określenie parametrów procesu filtrowania pozwalających na spełnienie tego żądania jest możliwe poprzez rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia optymalizacyjnego.

Przedmiotem referatu jest przedstawienie metody formułowania i rozwiązania zagadnienia optymalizacji parametrów procesu filtrowania wody z zastosowaniem symulacji komputerowej. W kolejnych punktach omówione zostaną: układ równań podstawowych wraz z warunkami granicznymi, sformułowanie zagadnienia optymalizacyjnego i metoda jego rozwiązania, przykład obliczeniowy oraz analiza i interpretacja wyników obliczeń. Referat zakończą wnioski i uwagi dotyczące zastosowań inżynierskich.

2. Układ równań podstawowych i warunki graniczne

Proces filtrowania wody związany jest z przepływem dwufazowego strumienia wody i drobnych cząstek zawiesin przez nieruchome złożę porowate, podczas którego występują różnorodne mechanizmy przyczepiania zawiesin do powierzchni ziaren złoża. Szczegółowy opis tych mechanizmów znaleźć można w [3]. Proces ten charakteryzuje się wysokim stopniem złożoności geometrycznych i fizycznych warunków transportu zawiesin w wolnych przestrzeniach złoża oraz zatrzymywania zawiesin na powierzchni ziaren, przy nieregularnej i zmieniającej się konfiguracji powierzchni międzyfazowych. Wobec tego, dla technicznych zastosowań, zachodzi potrzeba znalezienia takich sposobów modelowania fizycznych procesów, które pozwolą uniknąć konieczności uwzględniania wyżej określonych komplikacji, związanych ze zmiennością chwilowych parametrów lokalnych. W licznym zagranicznym i krajowym piśmiennictwie naukowym można wyróżnić [8, 9] dwie najważniejsze klasy metod opisu matematycznego omawianych zjawisk, tzw. metody makroskopowe (fenomenologiczne) i metody mikroskopowe.

Ponieważ podstawowym celem tego referatu jest przedstawienie efektywnej metody obliczania i optymalizacji procesu filtrowania dla potrzeb technicznego projektowania i eksploatacji filtrów, jako podstawę do opracowania modelu numerycznego przyjęto bezpośrednio metodę makroskopową.

Metody makroskopowe polegają na rozpatrywaniu dwufazowych przepływów przez ośrodki porowate, z uwzględnieniem zjawisk przyczepiania drobnych cząsteczek zawiesin do powierzchni ziarenek złoża (adsorpcja) lub odrywania osadów z powierzchni ziaren (sufozja) z zastosowaniem zastępczych modeli fizycznych w skali makroskopowej, tzn. znacznie większej od obszarów jednofazowych. Mogą to być modele pośrednie i bezpośrednie. Drobnoskalowe efekty lokalne zastępowane są odpowiednimi wyrażeniami wielkości uśrednionych, które wchodzi w równania zachowania oraz domykające układy równań konstytutywnych. Opisy procesów, uzyskiwane z zastosowaniem metod makroskopowych, charakteryzują się stosunkową łatwością eksperymentalnej weryfikacji wyników oraz przydatnością do inżynierskich zastosowań [3, 9].

Rozważmy proces filtracji kontaktowej, która definiowana jest jako uzdatnianie wody polegające na koagulacji cząstek zanieczyszczeń w ośrodku porowatym filtra. W tym przypadku koagulant jest wprowadzany do uzdatnianej wody bezpośrednio przed filtrami. Przebieg procesu uzdatniania wody opisywany jest malejącą funkcją koncentracji zawiesin w wodzie $C(x,t)$ oraz rosnącą funkcją kolmatacji złoża $\sigma(x,t)$.

Matematyczny opis procesu filtracji kontaktowej opracowali Adin i Rebhun [1]. Dla wyznaczenia obu funkcji $C(x,t)$ i $\sigma(x,t)$, autorzy wykorzystali dwa podstawowe równania różniczkowe, opisujące efekt filtrowania jako funkcję głębokości złoża x i czasu t filtrowania. Pierwszym – jest równanie bilansu zawiesin, drugim – równanie kinetyki zatrzymywania zawiesin w złożu, czyli jego kolmatacji.

Ponieważ dla zwykle stosowanych prędkości filtrowania dyspersja i zmiany koncentracji zawiesin w porach są pomijalnie małe, przyjmuje się *równanie bilansu* w postaci modelu Iwasaki'ego [4]:

$$w_f \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Równanie kinetyki filtrowania, tzn. zatrzymywania zawiesin w złożu, ustalono przy założeniu, że lokalna prędkość zatrzymywania zawiesin w złożu jest wynikiem działania na powierzchni ziaren złoża dwóch mechanizmów: przyczepiania i odrywania cząstek zawiesin. Podobne założenie przyjmował m.in. Minc [3]. Matematyczny opis tych zjawisk został przedstawiony równaniem:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = k_1 C (\sigma_{\max} - \sigma) w_f - k_2 \sigma \cdot i \quad (2)$$

gdzie

- k_1, k_2 – współczynniki, odpowiednio przyczepiania cząstek (*kolmatacji*) oraz odrywania cząstek (*sufozji*),
- σ_{\max} – maksymalna *chłonność złoża filtracyjnego*, w kg/m^3 , definiowana jako maksymalna ilość zawiesin w jednostce objętości złoża, która całkowicie wypełnia pory złoża; wielkość ta zależy od porowatości złoża oraz od rodzaju zastosowanego koagulantu; wyznaczana jest eksperymentalnie, np. wg. metodyki przedstawionej w [2]
- i – lokalny spadek hydrauliczny przepływu przez złożo w procesie filtrowania $i(x,t) = \partial h(x,t) / \partial x$.

Pierwszy wyraz po prawej stronie równania (2) określa kumulację cząstek zawiesin w złożu, która zależy od strumienia cząstek $w_f C$ oraz od *rezerywy kumulacji zawiesin w złożu* ($\sigma_{\max} - \sigma$). Drugi – określa mechanizm odrywania cząstek poprzednio zatrzymanych, który zależy od koncentracji zawiesin zatrzymywanych w złożu i oraz spadku hydraulicznego, wyrażającego siły ścinające.

Dzieląc równanie (2) przez w_f , otrzymujemy:

$$\frac{1}{w_f} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = k_1 C (\sigma_{\max} - \sigma) - k_2 \frac{\sigma}{k_f} \quad (3)$$

gdzie k_f – *współczynnik filtracji*, zgodnie z prawem Darcy, definiowany jest wzorem:

$$k_f = \frac{w_f}{i} \quad (4)$$

W procesie uzdatniania wody współczynnik $k_f(x,t)$ jest rosnącą funkcją koncentracji zawiesin w złożu σ , związanych z ziarenkami, tzn. $k_f(\sigma)$. Wg *Szechtmana* [3] funkcja ta może być opisana wzorem empirycznym:

$$k_f = k_{f0} \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma_{\max}}} \right)^3 \quad (5)$$

gdzie k_{f0} – *współczynnik filtracji czystego złoża*, dla $t = 0$, który może być wyznaczony ze wzoru *Kozeny-Carmana* [3]

$$k_{f0} = \frac{\varepsilon_0^3}{180(1-\varepsilon_0)^2} \frac{\gamma d^2}{\mu \varphi^2} \quad (6)$$

- gdzie ε_0 – porowatość czystego złoża,
- γ – ciężar właściwy wody,
- μ – współczynnik lepkości wody,
- d – średnica ekwiwalentna ziaren,
- φ – współczynnik kształtu ziaren,

Wobec tego, równanie kinetyki procesu (3), po podstawieniu (5), przyjmuje postać:

$$\frac{1}{w_f} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = k_1 C (\sigma_{\max} - \sigma) - \frac{k_2 \sigma}{k_{f0} (1 - \sqrt{\sigma/\sigma_{\max}})^3} \quad (7)$$

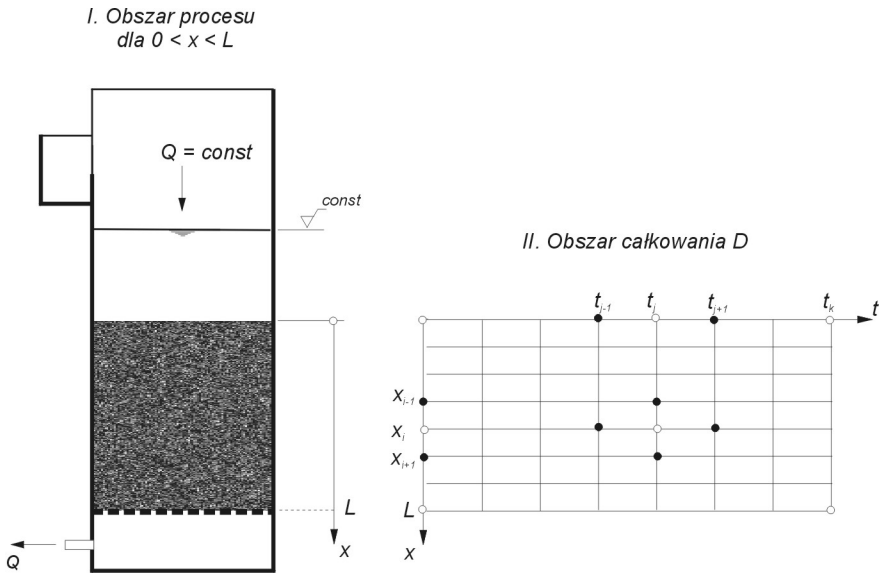
Oznacza to, że funkcje $C(x,t)$ i $\sigma(x,t)$, opisujące rozważany proces filtrowania, są opisane układem równań różniczkowych (1) i (7), gdzie wielkości w_f , σ_{\max} , k_1 , k_2 , k_{f0} są zadanymi wartościami stałymi, natomiast x i t – zmiennymi niezależnymi.

Pełne sformułowanie zagadnienia wymaga uzupełnienia układu podstawowych równań różniczkowych (1) i (7) warunkami początkowymi i brzegowymi oraz ograniczającymi. Biorąc pod uwagę sens fizyczny rozważanego zagadnienia filtrowania (rys. 1) warunki graniczne przyjmują postać:

- warunki początkowe: dla $t = 0$ i $0 \leq x \leq L$
 $C(x, 0) = C_0 \cdot \exp(-k_1 \sigma_{\max} x)$, $\sigma(x, 0) = 0$, $h(L, 0) = h_0$ (8)

- warunki brzegowe: dla $x = 0$ i $t > 0$
 $C(0, t) = C_0$, $\sigma(0, t)$ – obliczane z (3) na podstawie znajomości C (9)

Są to tzw. *warunki jednoznaczności*, których spełnienie jest konieczne do wyznaczenia jednoznacznych funkcji $C(x, t)$ i $\sigma(x, t)$ w obszarze całkowania D , określonym na rys.1, z zastosowaniem metody różnic skończonych [5] – z założeniem odpowiednich kroków Δx i Δt dla obu zmiennych niezależnych.



Rys.1. Schemat złoża do ustalenia warunków granicznych procesu filtrowania

Fig. 1. Scheme of filter bed for determining limiting conditions of filtration process.

Do budowy algorytmu obliczeń konieczne jest jeszcze określenie warunku zakończenia procesu obliczeniowego. Biorąc pod uwagę sens fizyczny procesu filtrowania, z którego wynika, że dla $x = L$, tzn. w przekroju wylotowym ze złoża filtracyjnego, opory hydrauliczne $h(L, t)$ oraz stężenie zawiesin $C(L, t)$ są rosnącymi funkcjami czasu t , czas końcowy t_k może być wyznaczony z warunków jakie muszą spełniać jakość filtratu $C(L, t)$ w filtracji oraz dopuszczalna wartość $h(L, t)$. Zatem:

- warunki *ograniczające proces*: dla $x = L$ i $t > 0$

$$C(L, t) \leq C_{dop} \quad \text{oraz} \quad h(L, t) \leq h_{dop} \quad (10)$$

Czas przy którym jedna z tych funkcji – jako pierwsza – osiągnie wartość dopuszczalną należy przyjąć jako czas końcowy t_k . Zatem

- warunki *końcowe*:

$$t_k = \min(t_c, t_h) \quad (11)$$

gdzie t_c – maksymalny czas filtrowania, dla którego $C(L, t) \leq C_{dop}$
 t_h – maksymalny czas filtrowania, dla którego $h(L, t) \leq h_{dop}$

Fizyczna interpretacja wyżej przyjętych warunków granicznych procesu filtrowania:

- warunki *początkowe* (8) określają dla chwili początkowej $t = 0$ wartości funkcji C i σ wzdłuż złoża oraz wartość funkcji h u wylotu ze złoża; w szczególności:
 - warunek (8₁) opisuje funkcję $C(x, 0)$ wzorem, wynikającym z (3) dla $\sigma = 0$,
 - warunek (8₂) stwierdza, że w chwili początkowej $t = 0$ koncentracja osadów σ na powierzchni ziaren jest zerowa, tzn. złoże jest czyste,
 - warunek (8₃) stwierdza, że w chwili początkowej opory hydrauliczne h_0 przepływu przez czyste złoże (gdy $\sigma = 0$), wyrażane są wzorem *Kozeny-Carmana* (6) dla przepływu laminarnego,
- warunki *brzegowe* (9) stwierdzają, że wartości funkcji C na powierzchni złoża (dla $x = 0$) przez cały czas (dla $t > 0$) wynoszą C_0 , natomiast wartości σ wynikają z rozwiązania równania kinetyki (3) dla $x = 0$,
- warunki *ograniczające* (10) i *końcowe* (11) dotyczą ograniczeń nałożonych na fizyczne skutki przepływu wody przez złoże o wysokości L w każdej chwili $t > 0$; w szczególności:
 - warunek (10₁) dotyczy ustalenia końcowego czasu trwania filtrowania t_c kiedy wzrastająca funkcja C dla filtratu (tzn. gdy $x = L$) osiągnie warunek $C = C_{dop}$,
 - warunek (10₂) dotyczy wzrastających oporów hydraulicznych na skutek kolmatacji złoża i oznacza, że czas filtrowania t_h ustalany jest dla warunku kiedy h osiągnie wartość graniczną h_{dop} .

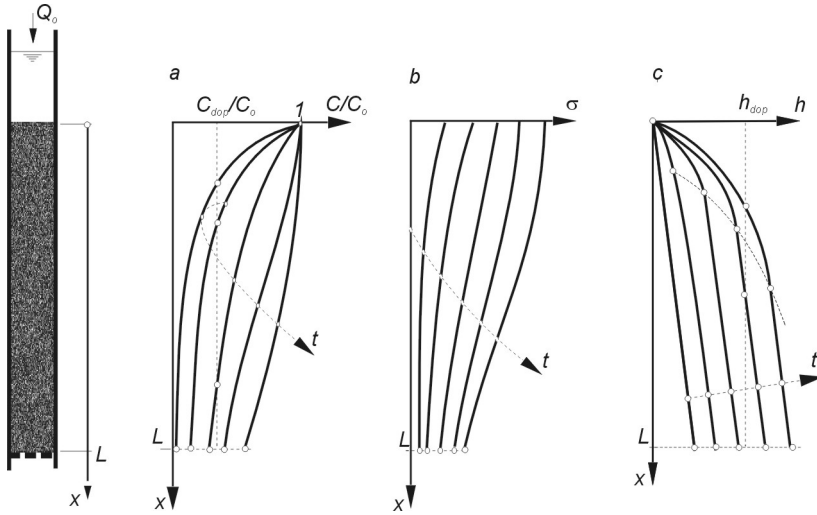
Sformułowane zagadnienie początkowo-brzegowe nie posiada analitycznego rozwiązania, ponieważ układ podstawowych równań (1) i (7) należy do klasy *równań hiperbolicznych quasi-liniowych*. Nieliniowość wywołuje ostatni wyraz po prawej stronie równania (7). W związku z tym, rozwiązania mogą poszukiwane numerycznie, z zastosowaniem np. metody siatek różnic skończonych (siatek) [5].

3. Sformułowanie zagadnienia optymalizacyjnego i ogólna koncepcja rozwiązania

W projektowaniu filtrów, dla zadanych wskaźników jakości wody surowej (stężenie początkowe zawiesin w wodzie C_0), podstawowym zagadnieniem, które należy rozwiązać, jest określenie wartości L , d oraz w_f (czyli wysokości złoża i średnicy jego ziaren oraz prędkości filtracji) w taki sposób, aby w całym okresie filtrowania spełnione były warunki dopuszczalnego stężenia zawiesin w filtracie C_{dop} , gdyż warunek $C < C_{dop}$ wynika z celu filtrowania, oraz dopuszczalnej wysokości strat hydraulicznych $h < h_{dop}$, co ma wpływ na wymiarowanie samego filtra i urządzeń regulacji. Analiza porównawcza różnych układów regulacji została przedstawiona w osobnym referacie [2]. Z tych dwóch warunków otrzymuje się wartości potencjalnych okresów filtrowania: okres bezpiecznego filtrowania t_C , wynikający z warunku $C(L, t) \leq C_{dop}$, oraz okres hydraulicznie uzasadnionego filtrowania t_h wynikający z warunku $h(L, t) \leq h_{dop}$. Otrzymane w ten sposób okresy najczęściej są różne, tzn. $t_C \neq t_h$. Można przyjąć, że parametry filtra dobrano w sposób optymalny, gdy spełniony zostanie warunek $t_C = t_h$.

W związku z tym, dla przypadku złoża jednowarstwowego, można przyjąć następujące **sformułowanie zagadnienia optymalizacji parametrów filtra**: dla zadanych wartości C_0 , C_{dop} i h_{dop} , należy wyznaczyć takie wartości L , w_f i d , aby uzyskać spełnienie warunku $t_C = t_h$. Ze względu na wielkości poszukiwane zagadnienie to odnosi się do etapu projektowania filtra. Należy zauważyć, że poszukiwane wielkości L , w_f i d są powiązane między sobą.

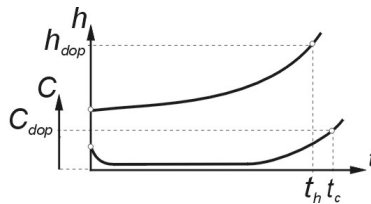
Przedstawiając ogólną koncepcję rozwiązania postawionego zagadnienia optymalizacji parametrów filtra, należy zauważyć, że w równania bilansu zawiesin (1) i kinetyki (7), opisujące przebieg procesu filtrowania wody, wchodzi prędkość filtracji w_f oraz parametry złoża (m.in. L i d). W związku z tym, rozwiązania tych równań, funkcje $C(x, t)$ i $\sigma(x, t)$, przedstawione na rys. 2a i b, są wyznaczone dla zadanych wartości w_f oraz d i ε . Ponieważ, wyznaczenie rodziny wykresów $h(x, t)$ wymaga wykorzystania wcześniej wyznaczonej funkcji $\sigma(x, t)$, także rodzina wykresów $h(x, t)$ zawsze odnosi się do zadanej prędkości w_f oraz parametrów złoża. Oznacza to, że trzy rodziny wykresów, przedstawione na rys. 2a, b i c, są *charakterystykami procesu*, gdyż zależą od zadanej wartości prędkości w_f , która jest ich parametrem.



Rys.2. Wykresy stężenia zawiesin w strumieniu filtrowanej wody C/C_0 , koncentracji osadów w złożu σ oraz strat hydraulicznych h – wzdłuż jednorodnego złoża (x) dla różnych chwil czasu filtrowania t , wyznaczone dla zadanej prędkości filtracji w_f .

Fig. 2. Graphs of concentration of particles in the filtered water C/C_0 , concentration of particles deposited in the bed σ and head losses h along an isotropic bed (x) for different filtration time moments and given value of velocity w_f .

Przecinając rodziny wykresów na rys. 2a i c poziomą prostą $x = L$, otrzymujemy dwa wykresy stężenia zawiesin $C(L, t)$ w filtracji oraz strat hydraulicznych $h(L, t)$, przedstawione na rys. 3, które są podstawą do wyznaczenia dopuszczalnych granicznych okresów filtrowania: okresu bezpiecznego filtrowania, t_c , i okresu hydraulicznie uzasadnionego filtrowania t_h .

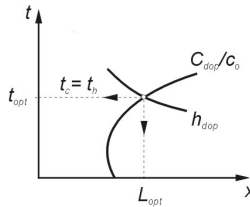


Rys.3. Określenie granicznego czasu trwania cyklu filtracyjnego t_c i t_h .

Fig. 3. Determination of a terminal time of filtration cycle t_c and t_h .

Ogólna koncepcja rozwiązania wymaga powtarzania komputerowych obliczeń, w celu wyznaczenia rodzin wykresów (a) i (c), przedstawionych na rys. 2, dla kilku wartości prędkości w_{fi} oraz jednakowej wartości średnicy d ziaren, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$. Wobec tego

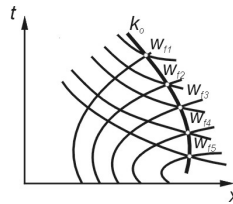
1. przyjmijmy, że na rys. 2 wykresy (a) i (c) zostały komputerowo obliczone dla zadanej i -tej wartości prędkości w_{fi} oraz średnicy ziaren d_j ;
2. przecinając rodzinę wykresów (a) na rys. 2 pionową prostą C_{dop}/C_0 , otrzymujemy punkty o współrzędnych (t, x) , które na rys. 4 wyznaczają krzywą odnoszącą się do zadanej wartości C_{dop}/C_0 ; rzędne punktów tej krzywej (na rys. 4) oznaczają okresy bezpiecznego filtrowania t_C , odcięte – wysokości x złoża; następnie
3. przecinając rodzinę wykresów (c) na rys. 2 pionową prostą $h = h_{dop}$, otrzymujemy punkty także o współrzędnych (t, x) , które na rys. 4 wyznaczają drugą krzywą odnoszącą się do zadanej wartości h_{dop} ; rzędne punktów tej krzywej oznaczają okresy filtrowania t_h , odcięte – wysokości x złoża;



Rys. 4. Krzywe zależności $t_C(x)$ i $t_h(x)$ dla zadanej wartości C_{dop}/C_0 oraz h_{dop}

Fig. 4. Curves of functions $t_C(x)$ and $t_h(x)$ for given values of C_{dop}/C_0 and h_{dop}

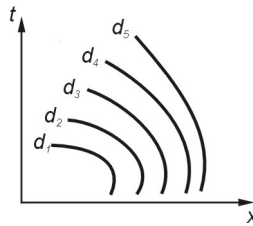
4. w związku z tym, rzędna punktu przecięcia obu wykresów na rys. 4 określa warunek optymalizacji $t_C = t_h$, natomiast odcięta wyznacza zoptymalizowaną wysokość L_{opt} złoża; przy czym należy pamiętać, że otrzymany wynik odnosi się do i -tej prędkości w_{fi} oraz dla średnicy d_j ; można więc powiedzieć, że prędkość w_{fi} jest parametrem punktu przecięcia;
5. kolejno, zmieniając wartość parametru w_{fi} oraz zachowując pierwotną średnicę d_j ziaren złoża jednowarstwowego, dla których należy powtórzyć obliczenia i konstrukcje określone w punktach 1 do 3, otrzymujemy kolejne pary wykresów dla C_{dop}/C_0 oraz dla h_{dop} , których przecięcia będą wyznaczać kolejne punkty optymalizacji dla odpowiednich wartości parametru w_{fi} , przedstawione na rys. 5;



Rys. 5. Zmiany optimum czasu filtrowania t_{opt} w zależności od prędkości filtrowania w_{fi} (K_0 – tzw. krzywa optymalizacji)

Fig. 5. Changes in optimal filtration time t_{opt} in function of filtration velocity w_{fi} (K_0 – optimization curve)

6. pogrubiona linia na rys. 5, wyznaczona przez punkty przecięcia odpowiednich par krzywych, jest linią wiążącą trzy *optymalizowane wielkości*: okres filtrowania t , wysokość złoża L i prędkość filtrowania w_f , która jest parametrem punktów na pogrubionej krzywej; pogrubiona linia, która odnosi się do pierwotnej wartości średnicy d_j , jest to *krzywa optymalizacji* parametrów t , L i w_f ;
7. kolejno zmieniając wartość średnicy d_j ziaren w złożu *jednowarstwowym* oraz powtarzając działania określone w punktach od 1 do 6, otrzymujemy rodzinę *krzywych optymalizacji* wielkości t , L i w_f ; każda krzywa tej rodziny musi być wyskalowana prędkościami w_f ; tak wyskalowane rodziny krzywych, przedstawione na rys. 6, *wiążą cztery optymalizowane wielkości*: t , L , w_f oraz d .



Rys. 6. Krzywe optymalizacji dla różnych średnic ziaren d_j i różnych prędkości w_{fi}

Fig. 6. Optimization curves for different bed grain sizes d_j and filtration velocities w_{fi}

4. Optymalizacja z wykorzystaniem symulacji komputerowej

W celu wykorzystania przedstawionego opisu matematycznego do przeprowadzenia wielowariantowej analizy i wyznaczenia rozwiązania optymalnego, opracowano model numeryczny w środowisku MATLAB [7]. Do rozwiązania równań różniczkowych (1) i (7) wykorzystano metodę różnic skończonych. W tym celu:

1. rozważany obszar, dla $0 \leq x \leq L$ oraz $0 \leq t \leq t_k$, w którym poszukiwane jest rozwiązanie, został równomiernie podzielony na jednakowe komórki prostokątne o wymiarach Δx i Δt ;
2. równania *różniczkowe* zastąpiono w węzłach siatki odpowiednimi równaniami *różnicowymi*;
3. w oparciu o zadane warunki początkowe i brzegowe w węzłach siatki rozwiązano odpowiedni układ równań algebraicznych z dużą liczbą niewiadomych; w ten sposób otrzymano dyskretne wartości poszukiwanych funkcji w węzłach siatki.

Układ równań różniczkowych (1) i (7) w zapisie różnicowym, przyjmuje postać:

$$\frac{C_{i+1,k-1} - C'_{i,k-1}}{\Delta x} = - \frac{1}{w_f} \frac{\sigma_{i,k} - \sigma_{i,k-1}}{\Delta t} \tag{12}$$

$$\frac{1}{w_f} \frac{\sigma_{i,k} - \sigma_{i,k-1}}{\Delta t} = k_1 C_{i,k-1} (\sigma_{\max} - \sigma_{i,k-1}) - \frac{k_2}{k_{fo}} \sigma_{i,k-1} \left[1 - \left(\frac{\sigma_{i,k-1}}{\sigma_{\max}} \right)^{1/2} \right]^{-3} \quad (13)$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots n$ oraz $k = 2, 3, \dots m$.

Do wyznaczenia oporu hydraulicznego złoża wykorzystano prawo *Darcy* (4) oraz model *Szechmana* (5). Podczas kontynuacji procesu filtrowania przez złożo o wysokości L opór hydrauliczny przepływu, przez zastosowanie wzoru (4) i (5), może być wyrażony wzorem:

$$h(L, t) = h(L, 0) + \int_0^L i \cdot dx = h(L, 0) + \int_0^L \frac{w_f}{k_{fo}} \left(1 - \sqrt{\frac{\sigma(x, t)}{\sigma_{\max}}} \right)^{-3} dx \quad (14)$$

gdzie k_{fo} – jest współczynnikiem filtracji czystego złoża i może być wyznaczony ze wzoru *Kozeny-Carmana* (6).

Korzystając ze wzorów (4), (5) i (6), przy założeniu, że przepływ jest laminarny i że dla $t = 0$ złożo jest czyste (czyli $\sigma(x, 0) = 0$), można obliczyć również początkową wartość strat hydraulicznych $h(L, 0)$:

$$h(L, 0) = 180\nu \frac{(\varepsilon_o - 1)^2}{\varepsilon_o^3} \frac{L}{(d/\varphi)^2} \frac{w}{g} \quad (15)$$

Do znalezienia rozwiązania optymalnego wykorzystano algorytm symulowanego wyżarzania [6], który należy do klasy algorytmów heurystycznych, dobrze działających w przypadku zadań optymalizacyjnych z nieciągłą lub nieróżniczkowalną funkcją celu. Inspiracją tego algorytmu optymalizacyjnego był proces technologiczny stosowany w metalurgii i hutnictwie szkła. Realizacja polega na losowym generowaniu kolejnych rozwiązań dopuszczalnych z sąsiedztwa aktualnego rozwiązania i akceptowaniu ich jeśli nowe rozwiązanie jest lepsze od poprzedniego. Natomiast jeśli nowe rozwiązanie jest gorsze od poprzedniego, wtedy jest ono akceptowane z pewnym, odpowiednio określonym, prawdopodobieństwem, które zależy od parametru zwanego temperaturą wyżarzania. Prawdopodobieństwo zaakceptowania gorszego rozwiązania zależy od różnicy wartości funkcji celu dla poprzedniego i nowego rozwiązania, ale maleje wraz ze spadkiem temperatury. Powoduje to, że w początkowej fazie działania algorytmu, gdy temperatura jest wysoka, prawdopodobieństwo zaakceptowania gorszego rozwiązania jest bliskie 1. Takie postępowanie daje możliwość sprawdzenia całego obszaru poszukiwań. W miarę działania procedury symulowanego wyżarzania temperatura maleje, prawdopodobieństwo zaakceptowania gorszego rozwiązania też maleje, a tym samym zawęża się obszar poszukiwań i przeszukiwanie staje się coraz mniej przypadkowe. Założono, że początkowa temperatura powinna być tak dobrana, aby 70%-80% rozwiązań było akceptowanych.

W rozwiązywanym zadaniu optymalizacji parametrów filtra, jako kryterium optymalizacji przyjęto spełnienie warunku $t_C = t_h$. Jednak okazało się, że istnieje bardzo wiele rozwiązań, które spełniają ten warunek, jednak nie mogą być zaakceptowane z uwagi na otrzymywane zbyt małe lub zbyt duże wartości t_C i t_h , które pozbawione są praktycznego sensu. Dodano zatem do funkcji celu człony powodujące, że otrzymywane rozwiązanie będzie bliskie oczekiwanej wartości t_k długości cyklu filtracji. Ostatecznie jako funkcję celu przyjęto wyrażenie:

$$\min (2|t_C(L, w, d) - t_h(L, w, d)| + |t_C(L, w, d) - t_k| + |t_h(L, w, d) - t_k|) \quad (16)$$

gdzie wartości $t_C(L, w, d)$ oraz $t_h(L, w, d)$ są obliczane za pomocą modelu symulacyjnego. Pierwszy składnik w funkcji celu, uwzględniony z wagą równą 2, gwarantuje dążenie do spełnienia warunku $t_C = t_h$, natomiast dwa pozostałe składniki zapewniają zbliżenie się rozwiązania do oczekiwanej w praktyce długości cyklu filtracyjnego t_k .

5. Przykład obliczeniowy

Opracowany model zweryfikowano na przykładzie obliczeniowym dotyczącym procesu filtracji kontaktowej dla następujących wartości parametrów oraz wielkości stałych:

- koncentracja początkowa: $C_0 = 0,05 \text{ kg/m}^3$;
- teoretyczna *chłonność* złoża: $\sigma_{max} = 30 \text{ kg/m}^3$;
- parametry *wody* $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1,308 \cdot 10^{-3} \text{ Ns/ stąd}$
 $\nu = \mu/\rho = 1,308 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- współczynniki: $\varphi = 1,17$ (współczynnik kształtu ziaren), $k_1 = 0,1 \text{ m}^2/\text{kg}$, $k_2 = 0,001 \text{ h}^{-1}$
- parametry jednorodnego złoża z piasku kwarcowego:
 - porowatość $\varepsilon_0 = 0,4$ (nie zależy od d_e)
 - wysokość złoża $\{L\} \in 0,7 \div 1,5 \text{ m}$;
 - średnica ekwiwalentna ziaren $\{d_e\} \in 0,0005 \div 0,0015 \text{ m}$;
- prędkość filtracji: $\{w_f\} \in 3 \div 12 \text{ m/h}$;
- ograniczenia: $h_{dop} = 2,5 \text{ m}$; $C_{dop} = 0,005 \text{ kg/m}^3$

naależy wyznaczyć:

1. optymalne wartości L , w_f i d_e przy których $t_C = t_h$;
2. optymalną wartość okresu filtrowania $t_C = t_h$;
3. dla wyznaczonych wartości L , w_f i d_e
 - wykresy funkcji stężenia $C(x, t)$ i koncentracji $\sigma(x, t)$ oraz $h(x, t)$;
 - wpływ wzrostu prędkości filtrowania w_f na czas filtrowania t_C dla zadanej wartości C_{dop} ;
 - wpływ zmian prędkości filtrowania w_f , w zadanym przedziale, na czas filtrowania t_h , określane dla h_{dop}
 - wpływ zmiany prędkości filtrowania w_f na prędkość kolmatacji złoża w wybranym przekroju;

W optymalizacji przyjęto wartość oczekiwanej długości cyklu filtracyjnego $t_k = 24 \text{ h}$.

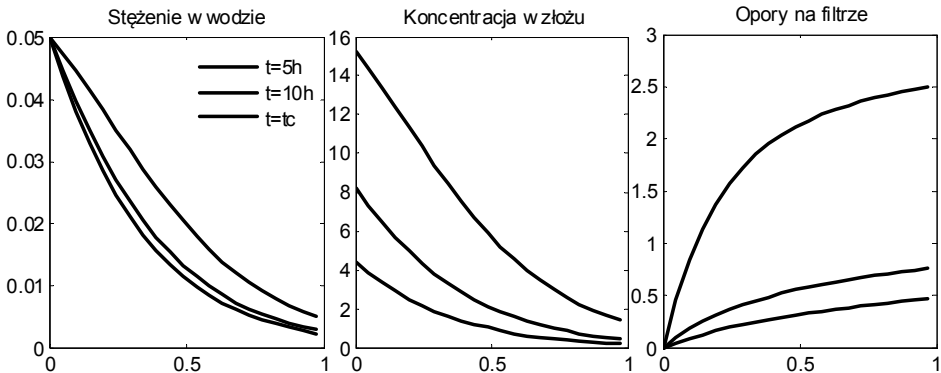
Wykonano szereg optymalizacji dla losowo wybieranych wartości początkowych L_{start} , w_{start} i d_{start} . W Tabeli 1 zestawiono wyniki pogrupowane ze względu na otrzymane rozwiązanie optymalne. Można zauważyć, że w przeprowadzonych próbach uzyskano 4 zestawy optymalnych parametrów filtra (L_{opt} , w_{opt} , d_{opt}). Pierwszy zestaw optymalny, dla wariantów 1÷6, może być zrealizowany dla $L = 0,97 \text{ m}$, $w = 6,4 \text{ m/h}$ i $d = 1,23 \text{ mm}$. W drugim zestawie (warianty 7÷9) optymalne parametry filtra to: $L = 0,87 \text{ m}$, $w = 3,7 \text{ m/h}$ i $d = 0,6 \text{ mm}$. Trzeci zestaw optymalny (warianty 10 i 11) tworzą wartości: $L = 0,94 \text{ m}$, $w = 5,0 \text{ m/h}$ i $d = 0,87 \text{ mm}$, a czwarty wartości: $L = 1,04 \text{ m}$, $w = 7,3 \text{ m/h}$ i $d = 1,5 \text{ mm}$. W każdym przypadku (oprócz ostatniego) uzyskano spełnienie warunku $t_C = t_h$, przy czym zgodnie z przyjętym w funkcji celu oczekiwanym czasem cyklu filtracyjnego, wartości te były równe 24 h. W ostatnim przypadku rozwiązanie optymalne uzyskano dla różnicy pomiędzy t_C i t_h równej ok. 1 h. Wyniki te wskazują na to, że problem optymalizacji parametrów procesu filtrowania wody ma wiele rozwiązań

optymalnych. Każdy z otrzymanych zestawów daje poprawne, z technicznego punktu widzenia, rezultaty, biorąc pod uwagę zarówno kryterium jakości filtratu (C_{dop}), jak i kryterium dopuszczalnych oporów na filtrze (h_{dop}). Na rys. 7 przedstawiono wykresy stężenia zawiesin w wodzie, koncentracji zawiesin kumulowanych w złożu oraz oporów na filtrze w kilku chwilach czasowych (dla $t = 5$ h, 10 h oraz 24 h) dla pierwszego zestawu optymalnych wartości średnic ziaren złoża $d_e = 1,23$ mm, optymalnej prędkości filtracji $w_f = 6,4$ m/h i optymalnej wysokości złoża $L = 0,97$ m.

Tab. 1. Wybrane wyniki optymalizacji

Tab. 1. Selected results of optimization

Nr war.	L_start [m]	w_start [m/h]	d_start [mm]	L_opt [m]	w_opt [m/h]	d_opt [mm]	t _c [h]	t _h [h]
1	1.23	10.94	1.11	0.97	6.40	1.23	24	24
2	0.96	7.55	0.61	0.96	6.38	1.22	24	24
3	0.75	6.87	0.59	0.98	6.41	1.23	24	24
4	1.15	11.52	1.12	0.96	6.38	1.22	24	24
5	1.46	11.62	1.32	0.99	6.41	1.23	24	24
6	0.71	3.48	0.86	0.87	3.68	0.59	24	24
7	1.22	4.45	0.53	0.86	3.68	0.59	24	24
8	0.80	4.08	0.83	0.89	3.69	0.59	24	24
9	0.92	4.44	0.84	0.91	5.09	0.88	23.9	24
10	1.09	4.41	0.71	0.94	5.03	0.87	24	24
11	1.06	3.06	1.17	0.90	5.03	0.87	24	24
12	1.49	8.16	0.81	1.04	7.26	1.50	25	23.9



Rys. 7. Wyniki symulacji: rozkład stężenia zawiesin w wodzie, koncentracji zawiesin w złożu oraz oporów na filtrze w różnych chwilach czasowych dla pierwszego zestawu optymalnych parametrów filtra ($L=0,97$ m, $w=6,4$ m/h, $d=1,23$ mm).

Fig. 7. Results of simulation: plots of concentration of particles in the filtered water, concentration of particles deposited in the bed and head losses along a filter bed for different time moments for first set of optimal values of filter parameters.

6. Wnioski i uwagi końcowe

1. W referacie przedstawiono metodę sformułowania i rozwiązania zagadnienia optymalizacji parametrów procesu filtrowania wody z zastosowaniem symulacji komputerowej. Sformułowany model matematyczny i opracowany w środowisku Matlab program symulacyjny zweryfikowano na przykładzie obliczeniowym dotyczącym procesu filtracji kontaktowej. Otrzymane wyniki symulacji potwierdziły poprawność przyjętych założeń i zastosowanych metod obliczeniowych.
2. Opracowano metodę automatycznej optymalizacji parametrów procesu filtrowania wody z wykorzystaniem algorytmu symulowanego wyżarzania. Metoda pozwala przeprowadzić wielowariantową analizę i wyznaczyć rozwiązanie optymalne dla zadanych kryteriów, dotyczących zarówno jakości filtratu (C_{dop}), jak i dopuszczalnych oporów na filtrze (h_{dop}). W funkcji celu zadania optymalizacji uwzględniono żądanie spełnienia warunku zrównania czasu bezpiecznego filtrowania, t_C , i hydraulicznie uzasadnionego czasu filtrowania, t_h , oraz dodatkowo żądanie osiągnięcia oczekiwanej wartości t_k długości cyklu filtracji. Pozwoliło to uzyskać wyniki, które są technicznie uzasadnione i oczekiwane. Taki sposób rozwiązania daje możliwość zastosowania opracowanej metody w praktyce projektowania filtrów do uzdatniania wody przy wyznaczaniu optymalnych parametrów filtracji.
3. Należy podkreślić, że opracowana metoda wymaga znajomości eksperymentalnie wyznaczonych parametrów filtra, takich jak chłonność złoża, porowatość, średnica ekwiwalentna i współczynnik kształtu ziaren oraz współczynników kolmatacji i sufozji. Poprawnie przeprowadzone badania eksperymentalne muszą dostarczyć wiarygodnych wartości tych parametrów. Z drugiej strony, model symulacyjny może pomóc w przeprowadzeniu analizy wrażliwości wyników na zmiany w wartościach parametrów i tym samym wskazać parametry kluczowe, które trzeba znać z odpowiednio dużą dokładnością i precyzją.

Bibliografia

- [1] Adin A., Rebhun M.: A model to predict concentration and head loss profiles in filtration. *Journal of American Water Works Association*, Vol. 69, 1977, No.8, 444-453.
- [2] Grabarczyk C.: Przegląd i analiza porównawcza konstrukcji filtrów grawitacyjnych. Mat. Konf. WODA 2010 „Zaopatrzenie w wodę, jakość i ochrona wód” (*ten tom*).
- [3] Grabarczyk C.: Hydromechanika filtrowania wody. Warszawa 2010, WNT, 394 s.
- [4] Iwasaki T.: Some notes on sand filtration. *Journal of American Water Works Association*, Vol. 29, 1937, No.12, 1591-1602.
- [5] Kincaid D., Cheney W.: Analiza numeryczna. Warszawa 2006, WNT, 692 s.
- [6] Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P.: Optimization by Simulated Annealing. *Science*, New Series, Vol. 220, 1983, No. 4598, 671-680.
- [7] MATLAB Programming, Version 7. The MathWorks, Inc., 2004.

- [8] Zielina M., Dąbrowski W.: Modelowanie filtracji pospiesznej przy użyciu metody UBE. *Czasopismo Techniczne*, 2001, z. 3-B, 184-201.
- [9] Zielina M., Dąbrowski W.: Modele makroskopowe w filtracji pospiesznej. *Czasopismo Techniczne*, 2001, z. 3-B, 202-221.